3 河合塾人気数学講師　大竹真一先生が選んだ1問

問　題

xyz 座標空間において，原点Oからの距離が1である点Pをとる。点Pを x 軸を軸として60° 回転して得られる点をQとする。ただし回転角は y 軸の正の向きから z 軸の正の向きにとる。さらに点Qを y 軸を軸として60° 回転して得られる点をRとする。ただし回転角は z 軸の正の向きから x 軸の正の向きにとる。

点Pのとりかたをいろいろ変えるとき，2点P，Rの間の距離を最大にするような点Pを1つ求めよ。

［大竹先生のオリジナル問題］

解　答

P (x, y, z) ，Q (x', y', z') ，R (x'', y'', z'') とする。このとき，OP $=1$ から $x^2+y^2+z^2=1$ である。

yz平面上で (y, z) を60° 回転すると (y', z') となり，zx平面上で (z', x') を60° 回転すると (z'', x'') となるので，

$$x' = x, \quad \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y - \sqrt{3}z \\ \sqrt{3}y + z \end{pmatrix}$$

$$y'' = y', \quad \begin{pmatrix} z'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z' - \sqrt{3}x' \\ \sqrt{3}z' + x' \end{pmatrix}$$

よって，

$$x'' = \frac{1}{2}\left\{ \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}y + z\right) + x \right\} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z$$

$$y'' = \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z$$

$$z'' = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}y + z\right) - \sqrt{3}x \right\} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{1}{4}z$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}
\mathrm{PR}^2 &= (x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2 \\
&= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{3}{4}z\right)^2 \\
&= x^2 + y^2 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{3}{2}xy + \frac{\sqrt{3}}{2}yz + \frac{\sqrt{3}}{2}zx \\
&= \frac{7}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \frac{3}{4}\left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3}z^2 + 2xy - \frac{2}{\sqrt{3}}yz - \frac{2}{\sqrt{3}}zx\right) \\
&= \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\left(x + y - \frac{1}{\sqrt{3}}z\right)^2 \leqq \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

$x + y - \frac{1}{\sqrt{3}}z = 0$ のとき，PRは最大となる。このような点Pの1つは $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ である。