1 日本数学コンクール委員会副委員長　大沢健夫先生が選んだ1問

問　題

正四面体の面である4つの正三角形の各々について,どれか1つの頂点を選び,そこから対辺へ垂線を引きます。このようにしてできる正四面体上の模様の種類は何通りでしょうか。ただし,正四面体をある直線のまわりで回転させることによって2つの模様がぴったりと重なる場合には,それらを区別せずに1つの模様として数えることにします。

［2004年 日本数学コンクール 第8回 ジュニアの問題より］

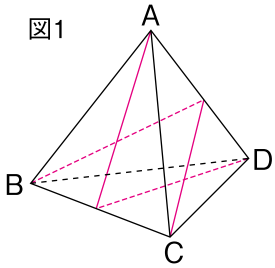
解　答

各面に対し，条件をみたす線分（対辺への垂線）は3通りある。したがって，模様の総数を，回転による一致を考慮せずに位置の違うものをすべて区別して数え上げると，

$$3^4 = 81\text{（通り）}$$

となる。回転の効果を含めるために，対称性の高いものから考察する。まず，右図であるが，これは（0°の回転も含めて）4通りの回転で不変である。実際，回転の軸としてはABの中点とCDの中点を結ぶ直線，またはBCの中点とADの中点を結ぶ直線，またはACの中点とBDの中点を結ぶ直線をとればよい。この模様の位置が回転によってどう変化するかを調べたい。

図1



そのために，そもそも正四面体をそれ自身にぴったり重ねる回転は何個あるかを考えよう。

1つの頂点を固定する回転に着目すると，それらは各頂点につき3通りで，そのうちの1つは0°の回転だから，全部あわせると，$(3-1)\times 4+1=9$（通り）。

また，A⟷C，B⟷Dのように頂点どうしを入れ替える回転は，Aの相手はB，C，Dの3個だから全部で3通り。

したがって，求める回転の個数は，$9+3=12$（通り）。

よって，図1の模様の位置は12通りの回転によって，

$$12 \div 4 = 3\text{（通り）}$$

に変化する。つまり最初にあげた81通りのうち，3通りがこの模様の回転によってつくされる。

次に，（0°の回転も含めて）2通りの回転で不変な模様をあげると，

図2

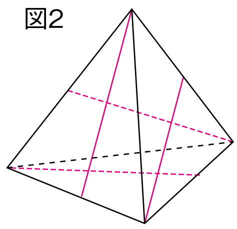


図3

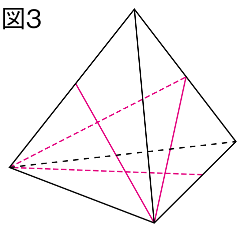
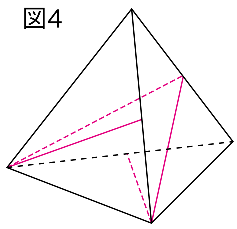


図4



であるが，上と同様の理由でこれらの3つの模様の各々によって81通りのうち，

$$12 \div 2 = 6\text{（通り）}$$

がつくされる。

ところが，

$$3\times 1+6\times 3+12\times 5=81$$

という等式が成り立つので，対称性のない残りの模様の総数は5通りであることがわかる。

よって，求める模様の総数は，$1+3+5=9$（通り）である。