

高校生に教えたい別解を募集しています。

高校生にぜひ解かせたい

私が選んだ

“とっておきの1問”を解いてください。

別解で

図形編

応募方法などは p.4 をご覧ください。

1 日本数学コンクール委員会副委員長 大沢健夫先生が選んだ1問

問題

正四面体の面である4つの正三角形の各々について、どれか1つの頂点を選び、そこから対辺へ垂線を引きます。このようにしてできる正四面体上の模様の種類は何通りでしょうか。ただし、正四面体のある直線のまわりで回転させることによって2つの模様がぴったりと重なる場合には、それらを区別せずに1つの模様として数えることにします。

[2004年 日本数学コンクール 第8回ジュニアの問題より]

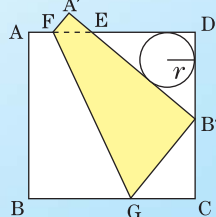
大沢健夫先生からのメッセージ

この問題は「サイコロは何通りあるか」という問をひねって作ったものです。数学コンクールにこれを出題したあと、学生に中高生に説明するために作ってもらった解答が、私が用意したものと違う数え上げ方だったので、ちょっとびっくり。今回またどんな数え上げ方に会えるか、楽しみです。

2 和算研究家 深川英俊先生が選んだ1問

問題

正方形の紙 ABCD がある。頂点 B を辺 CD 上に折り込み、その折り目を FG とする。辺 AB の移った先 A'B' が辺 AD と交わる点を E とする。このとき、直角三角形 B'DE の内接円の半径 r と等しい線分はあるか。証明を付けて答えよ。



[福島県福島市の黒岩虚空蔵尊満願寺に明治26年(1893)に奉納された現存する算額からの問題]

深川英俊先生からのメッセージ

現在の高校生にとってパソコンは大きな位置を占めていますので、どうかと思いつつ、教科「情報」を終えた高校3年生に折り紙数学をやらせました。これが何と驚き。全員夢中になって三角形の4心を折り込んでいました。やはり自分の手を使う作業は楽しいようです。今回の和算の折り紙問題は結構味のある問題です。和算を楽しんでください。

3 河合塾人気数学講師 大竹真一先生が選んだ1問

問題

xyz 座標空間において、原点 O からの距離が1である点 P をとる。点 P を x 軸を軸として 60° 回転して得られる点を Q とする。ただし回転角は y 軸の正の向きから z 軸の正の向きにとる。さらに点 Q を y 軸を軸として 60° 回転して得られる点を R とする。ただし回転角は z 軸の正の向きから x 軸の正の向きにとる。

点 P のとりかたをいろいろ変えるとき、2点 P 、 R の間の距離を最大にするような点 P を1つ求めよ。

[大竹先生のオリジナル問題]

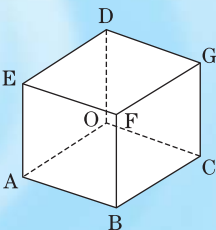
大竹真一先生からのメッセージ

平面上の1次変換を把握するときと同じように、空間でも、全体を見ることである点についての情報が得られることもあれば、特別な点を考察することによって全体がわかることもあります。2点の間の距離が最小のときを考察するのも興味深いですね。

4 啓林館高校数学教科書著者 若山正人先生が選んだ1問

問題

1辺の長さが1の立方体 $OABC-DEFG$ において、辺 AE 、 DG の中点をそれぞれ M 、 N とする。辺 DE 上の点 X と辺 BC 上の点 Y が4点 X 、 M 、 Y 、 N が同一平面上にあるように動くとき、 $\triangle XMY$ の面積の最大値、最小値を求めよ。



[2005年度 九州大学・理を改題]

若山正人先生からのメッセージ

これは意味を理解する際に立体図形の感覚が必要な問題です。お示ししている解答例(p.3)では、ベクトルを用いてただ単にいてないに計算するだけの、あまり頭を使わない方法をとっています。つまり、確実ではありますが面白くない解答です。では、純粋に幾何学的考察に基づいた解答(あるいは答えの幾何学的解釈)は見つかるでしょうか?

高校生に教えたい別解を募集しています。

高校生にぜひ解かせたい

私が選んだ“とっておきの1問”を解いてください。

別解で

図形編

ここに示された解答以外の解き方を考えてください。

1 日本数学コンクール委員会副委員長 大沢健夫先生が選んだ1問

問題

正四面体の面である4つの正三角形の各々について、どれか1つの頂点を選び、そこから対辺へ垂線を引きます。このようにしてできる正四面体上の模様の種類は何通りでしょうか。ただし、正四面体のある直線のまわりで回転させることによって2つの模様がぴったりと重なる場合には、それらを区別せずに1つの模様として数えることにします。

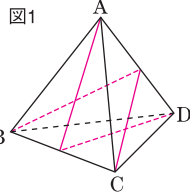
[2004年 日本数学コンクール 第8回 ジュニアの問題より]

解答

各面に対し、条件をみたす線分(対辺への垂線)は3通りある。したがって、模様の種類を、回転による一致を考慮せずに位置の違うものをすべて区別して数え上げると、

$$3^4 = 81 \text{ (通り)}$$

となる。回転の効果を含めるために、対称性の高いものから考察する。まず、右図であるが、これは(0°の回転も含めて)4通りの回転で不変である。実際、回転の軸としてはABの中点とCDの中点を結ぶ直線、またはBCの中点とADの中点を結ぶ直線、またはACの中点とBDの中点を結ぶ直線をとればよい。この模様の位置が回転によってどう変化するかを調べたい。



そのために、そもそも正四面体をそれ自身にぴったり重ねる回転は何個あるかを考えよう。

1つの頂点を固定する回転に着目すると、それらは各頂点につき3通りで、そのうちの1つは0°の回転だから、全部あわせると、 $(3-1) \times 4 + 1 = 9$ (通り)。

また、 $A \leftrightarrow C, B \leftrightarrow D$ のように頂点どうしを入れ替える回転は、Aの相手はB, C, Dの3個だから全部で3通り。

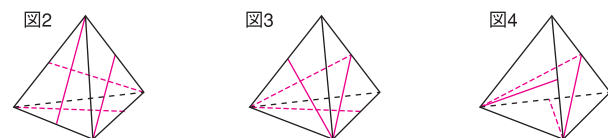
したがって、求める回転の個数は、 $9 + 3 = 12$ (通り)。

よって、図1の模様の位置は12通りの回転によって、

$$12 \div 4 = 3 \text{ (通り)}$$

に変化する。つまり最初にあげた81通りのうち、3通りがこの模様の回転によってつくされる。

次に、(0°の回転も含めて)2通りの回転で不変な模様をあげると、



であるが、上と同様の理由でこれらの3つの模様の各々によって81通りのうち、

$$12 \div 2 = 6 \text{ (通り)}$$

がつくされる。

ところが、

$$3 \times 1 + 6 \times 3 + 12 \times 5 = 81$$

という等式が成り立つので、対称性のない残りの模様の種類は5通りであることがわかる。

よって、求める模様の総数は、 $1 + 3 + 5 = 9$ (通り) である。

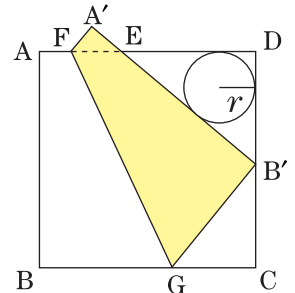
おおさわ・たけお (名古屋大学教授)

富山県生まれ。京都大学理学部を卒業。京都大学数理解析研究所を経て現在、名古屋大学教授。専攻は多変数関数論。「大沢・竹腰の定理」は多方面の応用をもつ。著書は「多変数複素解析」(岩波書店) および「複素解析幾何と $\bar{\partial}$ (ディーバー)方程式」(培風館)。趣味は囲碁。

2 和算研究家 深川英俊先生が選んだ1問

問題

正方形の紙ABCDがある。頂点Bを辺CD上に折り込み、その折り目をFGとする。辺ABの移った先A'B'が辺ADと交わる点をEとする。このとき、直角三角形B'DEの内接円の半径rと等しい線分はあるか。証明を付けて答えよ。



[福島県福島市の黒岩虚空蔵尊満願寺に明治26年(1893)に奉納された現存する算額からの問題]

解答

$r = A'E$ と思われる。これを示す。

点Bより線分A'B'に垂線を引き、その足をHとする。折り返しなので、

$$\angle BB'C = \angle ABB' = \angle A'B'B$$

となり、2つの直角三角形 $\triangle BB'C$ と $\triangle BB'H$ はBB'を共通辺とする合同な三角形となる。BH=BCとなり、辺A'B'はBを中心とする円に接する。

ここで、 $\triangle B'DE$ の3辺と内接円の半径rについて、右の図より、

$$EB' = (DE - r) + (DB' - r) = DE + DB' - 2r$$

となるから、

$$r = \frac{DE + DB' - EB'}{2}$$

次に、辺A'B'はBを中心とする円に接することから、

$$r = \frac{DE + DB' - EB'}{2} = \frac{(AD - AE) + (DC - CB') - B'E}{2} = \frac{(AD - EH) + (DC - HB') - B'E}{2}$$

ここで、 $EH + HB' = A'B' - A'E$ 、 $B'E = A'B' - A'E$ を代入して、

$$r = \frac{AD + DC - 2A'B' + 2A'E}{2} = A'E$$

これで証明できた。

ふかがわ・ひとし (名城大学非常勤講師)

福岡県生まれ。山口大学文学部を卒業して昭和42年より愛知県内の高校で数学を教える。平成16年の退職までに教材研究として和算を調べる。いくつかの大学(国内では6大学、ヨーロッパで2大学)の公開講座で和算を紹介する。定年後の平成17年には名古屋市科学館で「全国算額展」を企画・監修する。和算の本を国内で4冊、海外で3冊出版。



応募方法などは
p.4をご覧ください。



3 河合塾人気数学講師 大竹真一先生が選んだ1問

問題

xyz 座標空間において、原点 O からの距離が 1 である点 P をとる。点 P を x 軸を軸として 60° 回転して得られる点を Q とする。ただし回転角は y 軸の正の向きから z 軸の正の向きにとる。さらに点 Q を y 軸を軸として 60° 回転して得られる点を R とする。ただし回転角は z 軸の正の向きから x 軸の正の向きにとる。

点 P のとりかたをいろいろ変えるとき、2 点 P , R の間の距離を最大にするような点 P を 1 つ求めよ。

[大竹先生のオリジナル問題]

解答

$P(x, y, z)$, $Q(x', y', z')$, $R(x'', y'', z'')$ とする。このとき、 $OP = 1$ から $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ である。

yz 平面上で (y, z) を 60° 回転すると (y', z') となり、 zx 平面上で (z', x') を 60° 回転すると (z'', x'') となるので、

$$x' = x, \quad \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y - \sqrt{3}z \\ \sqrt{3}y + z \end{pmatrix}$$

$$y'' = y', \quad \begin{pmatrix} z'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z' - \sqrt{3}x' \\ \sqrt{3}z' + x' \end{pmatrix}$$

よって、

$$x'' = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{3}y + z) + x \right\} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z$$

$$y'' = \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z$$

$$z'' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (\sqrt{3}y + z) - \sqrt{3}x \right\} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{1}{4}z$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} PR^2 &= (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{3}{4}z \right)^2 \\ &= x^2 + y^2 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{3}{2}xy + \frac{\sqrt{3}}{2}yz + \frac{\sqrt{3}}{2}zx \\ &= \frac{7}{4}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{3}{4} \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3}z^2 + 2xy - \frac{2}{\sqrt{3}}yz - \frac{2}{\sqrt{3}}zx \right) \\ &= \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(x + y - \frac{1}{\sqrt{3}}z \right)^2 \leq \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$x + y - \frac{1}{\sqrt{3}}z = 0$ のとき、 PR は最大となる。このような点 P の 1 つは $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ である。

おおたけ・しんいち (学校法人河合塾専任講師)

河合文化教育研究所研究員。京都府立大学・龍谷大学非常勤講師。また、河合サテライト講座(衛星中継)では電波を通じて全国の受験生に講義を行っている。大学生向けの著書に「基礎固め数学」(化学同人)、「数学の基本ノート 線形代数編」(中経出版)。受験生向けの著書に、「新こだわって! 微分・積分 標準・発展編」(河合出版)など。

4 啓林館高校数学教科書著者 若山正人先生が選んだ1問

問題

1 辺の長さが 1 の立方体 $OABC-DEFG$ において、辺 AE , DG の中点をそれぞれ M , N とする。辺 DE 上の点 X と辺 BC 上の点 Y が 4 点 X , M , Y , N が同一平面上にあるように動くとき、 $\triangle XMY$ の面積の最大値、最小値を求めよ。

[2005 年度 九州大学・理を改題]

解答

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OD} = \vec{d}$ とおく。
 $\vec{DX} = x$, $\vec{CY} = y$ とおくと、

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

このとき、

$$\vec{OM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d}, \quad \vec{ON} = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d},$$

$$\vec{OX} = x\vec{a} + \vec{d}, \quad \vec{OY} = y\vec{a} + \vec{c}$$

[4 点 X , M , Y , N が同一平面上にある]

$\Downarrow$

[Y が 3 点 X , M , N が定める平面上にある]

$\Downarrow$

[$\vec{OY} = s\vec{OM} + t\vec{ON} + u\vec{OX}$ ① ($s+t+u=1$ ② なる実数 s, t, u が存在する)]
と云いかえられる。

$$\text{①より, } y\vec{a} + \vec{c} = s \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d} \right) + t \left(\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d} \right) + u (x\vec{a} + \vec{d})$$

4 点 O, A, C, D は同一平面上にないので、 $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$ は一次独立であるから、

$$y = s + xu \text{③} \quad 1 = \frac{1}{2}t \text{④} \quad 0 = \frac{1}{2}s + t + u \text{⑤}$$

②, ④, ⑤より、 $t=2, s=2, u=-3$

したがって、③より、4 点 X, M, Y, N が同一平面上にあるための必要十分条件は $y = 2 - 3x$ が成立することである。

$\triangle XMY$ の面積は、 $\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{MX}|^2 |\vec{MY}|^2 - (\vec{MX} \cdot \vec{MY})^2}$ で与えられるので、

x の関数 $f(x) = |\vec{MX}|^2 |\vec{MY}|^2 - (\vec{MX} \cdot \vec{MY})^2$ の最大、最小を考える。

$$\vec{MX} = \vec{OX} - \vec{OM} = (x-1)\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\vec{MY} = \vec{OY} - \vec{OM} = (y-1)\vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d}$$

$\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$ は互いに直交する単位ベクトルであるから、

$$|\vec{MX}|^2 = (x-1)^2 + \frac{1}{4}$$

$$|\vec{MY}|^2 = (y-1)^2 + 1 + \frac{1}{4} = (1-3x)^2 + \frac{5}{4}$$

$$\vec{MX} \cdot \vec{MY} = (x-1)(y-1) - \frac{1}{4} = (x-1)(1-3x) - \frac{1}{4}$$

したがって、

$$\begin{aligned} f(x) &= \left\{ (x-1)^2 + \frac{1}{4} \right\} \left\{ (1-3x)^2 + \frac{5}{4} \right\} - \left\{ (x-1)(1-3x) - \frac{1}{4} \right\}^2 \\ &= \left(x^2 - 2x + \frac{5}{4} \right) \left(9x^2 - 6x + \frac{9}{4} \right) - \left(-3x^2 + 4x - \frac{5}{4} \right)^2 \\ &= 2x^2 - 2x + \frac{5}{4} = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

ここで、 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y = 2 - 3x \leq 1$ より、

$$\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

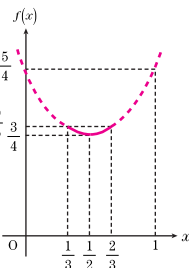
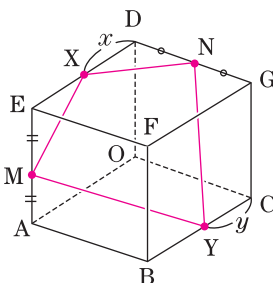
だから、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{3}{4}$, $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ のとき最大値 $\frac{29}{36}$ をとる。

よって、 $\triangle XMY$ の面積は、

X, Y がそれぞれ辺 DE, BC の中点のとき最小で最小値 $\frac{\sqrt{3}}{4}$,

X が辺 DE の 3 等分点の D に近い方にあり $Y=B$ のとき、あるいは

X が辺 DE の 3 等分点の D に遠い方にあり $Y=C$ のとき最大で最大値 $\frac{\sqrt{29}}{12}$ をとる。



わかやま・まさと (九州大学教授)

大阪市生まれ。広島大学大学院理学研究科数学専攻博士課程を修了。専門は表現論とゼータ関数の研究。著書「絶対力シミール元」(共著、岩波書店)などの専門書、翻訳書をはじめ、専門論文 80 数篇を執筆。平成 8 年より啓林館高校数学の教科書編集に携わる。趣味は樹木観察や散歩。

高校生に教えたい別解を募集しています。

高校生にぜひ解かせたい

別解で

図形編

私が選んだ“とっておきの1問”を解いてください。

教育現場では、数学の基礎学力の低下、そして、数学を解くうえで求められる発想力・創造力・応用力の欠如が深刻な問題となっています。このような現状を踏まえ、啓林館では、多面的にものを見る力や論理的に考える力を、数学の学習内容を通して生徒たちに培ってもらいたいと考えて、教科書・問題集など各種教材の開発を積極的にすすめております。

その一つとして、「私が選んだ“とっておきの1問”を別解で解いてください」を企画しました。

さまざまな形で数学教育に関わっておられる先生方に、高校生に解いてもらいたい“とっておきの1問”（図形分野）を選んでいただき、この1問の創造力にあふれた美しい解答※を生徒たちに味わってもらい、数学のおもしろさ・美しさ・すばらしさに気づいてもらいたいと願っております。

答えはひとつでも、たどり着く道はさまざまです。緑や光にあふれた美しい道があることを生徒自身の五感を通して感じてもらいたいと思います。生徒たちに伝えたい数学の美しさを、先生の豊かな経験と感性で別解にしてください。

多くの先生方からのご応募をお待ちしております。

※本チラシp.2,3の解答以外の解答

応募資格

高等学校（中高一貫校を含む）に勤務する教員（担当教科は数学である必要はありません）

応募方法

以下の事項をご記入のうえ、ご応募ください。

①問題番号 ②学校名 ③学校 TEL ④お名前（ふりがな） ⑤ご自宅住所・郵便番号 ⑥ご自宅 TEL ⑦メールアドレス

※複数ご応募の場合は、1問題（別解）ごとに、学校名、お名前等を明記してください。送付は一括でも可。匿名での応募はご遠慮ください。

- ・解答用紙はA4判かB4判（複数ご応募の場合は、問題ごとに用紙を分けてください）
- ・同じ問題に対して、複数の別解をご応募される場合も、別解ごとに用紙を分けてください。
- ・ワープロ・手書きのいずれでも可。ただし、CD-ROM・FDでお送りいただく場合は、必ずプリントアウトを添えてください。
- ・ご応募いただきました別解は、理由のいかんにかかわらず、返却いたしません。
- ・いただきました個人情報は、本企画の目的の範囲内で利用させていただきます。また、個人情報は適切に扱い、本人の承諾なく第三者に提供いたしません。

〔送り先〕〒543-0052 大阪市天王寺区大道4丁目3-25 「高校企画課 別解募集 係」

※Eメールでの応募は、セキュリティ上の問題から、受け付けておりません。

〔締 切〕2007年12月31日消印有効

別解作成に当たっての注意点

高校1～3年の学習内容で解いてください。

解答にあたっての解説やコメントがあれば、付記していただいても構いません。

選考委員

問題ごとに、それぞれの出題者を委員長として、啓林館数学編集部が共に選考に当たります。

選考基準

高校の学習内容の範囲内で解いていることが条件です。着眼点のオリジナリティーや、生徒にとってのわかりやすさも審査の対象にします。その他、上記の選考委員の感性によるものとします。

賞と賞金

問題ごとに次の賞を授与します。

・金賞1名 5万円分の図書カード / 銀賞2名 3万円分の図書カード / 銅賞3名 1万円分の図書カード

※受賞作品は弊社ホームページで紹介させていただきます。

受賞者の発表

2008年4月初め弊社ホームページで発表予定（受賞者には直接連絡をいたします）

本企画に関するお問合わせ先 啓林館「高校企画課 別解募集係」 TEL 06-6775-6524（平日9:00～17:00）

啓林館

<http://www.shinko-keirin.co.jp/>

次代へ
啓く
望み

■本 社	〒543-0052	大阪市天王寺区大道4-3-25	TEL.06-6779-1531
■東京支社	〒113-0023	東京都文京区向丘2-3-10	TEL.03-3814-2151
■札幌支社	〒003-0005	札幌市白石区東札幌5条2-6-1	TEL.011-842-8595
■東海支社	〒461-0004	名古屋市東区葵1-4-34 双栄ビル2F	TEL.052-935-2585
■広島支社	〒732-0052	広島市東区光町1-7-11 広島CDビル5F	TEL.082-261-7246
■九州支社	〒810-0022	福岡市中央区薬院1-5-6 ハイヒルズビル5F	TEL.092-725-6677