銀賞

問題４ の別解

熊本県立熊本高等学校

小坂（こさか）　和海（かずみ）

線分 MN，辺 DE，BC の中点をそれぞれ L，X_0，Y_0 とすると，図形の対称性から線分 X_0Y_0 は L を通る。また，直線 XL は平面 BCDE に含まれるから，XL は辺 BC と交わる。すなわち XY はつねに L を通る。また，辺 EF，OD の中点をそれぞれ H，I とするとき，平面 MHNI により線分 XY は 1：3 の比に分けられる。

ゆえに，

$$\triangle XMY : \triangle XML = XY : XL = 4 : 1 = (一定)$$

であるから，△XML が最大，最小になる場合を調べればよい。

2 直線 DE，MN はねじれの位置にあり，$DE \perp X_0L$，$MN \perp X_0L$ より 2 直線の最短距離は X_0L である。したがって X，Y がそれぞれ X_0，Y_0 と一致するとき△XML の面積は最小，よって△XMY の面積も最小になり，最小値は，

$$\frac{1}{4}X_0Y_0 \cdot MN = \frac{1}{4}\sqrt{2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

また，線分 XX_0 の長さが大きくなると X と直線 MN の距離が大きくなり△XML の面積は増加するから，$EX = \frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$（このとき Y は B または C に一致する）のとき面積は最大になり，このとき，

$$\overrightarrow{MX} = \left(0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right),\quad \overrightarrow{MY} = \left(1,\ 1,\ -\frac{1}{2}\right)$$

としてよいから△XMY の面積の最大値は，

$$\frac{1}{2}\sqrt{MX^2MY^2 - (\overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{MY})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(0 + \frac{1}{9} + \frac{1}{4}\right)\left(1 + 1 + \frac{1}{4}\right) - \left(0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{12}$$