

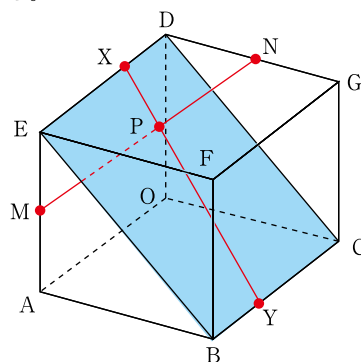
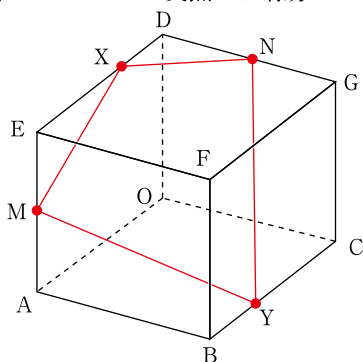
問題 4 の別解

銀賞

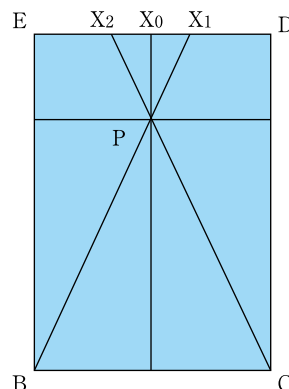
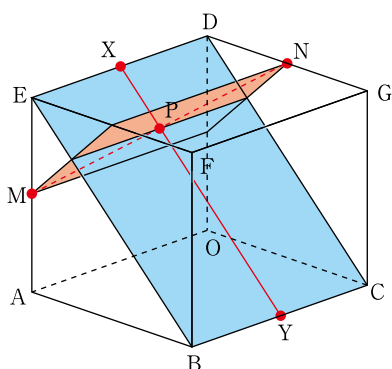
(三重) 鈴鹿高等学校

いわさ 岩佐
じゅんきよ 純巨

4点 X, M, Y, N が同一平面上にある条件は、線分 MN と線分 XY が交わることである。線分 XY は平面 BCDE 上にあるから、MN と XY の交点 P は線分 MN と平面 BCDE の交点となる。



下図より、点 P は長方形 BCDE 上の定点で、XY は、点 P を通り 2 辺 BC, DE と交わる直線となるから、辺 DE を 1:2 に内分する点、2:1 に内分する点をそれぞれ X_1 , X_2 とすると、点 X は、辺 DE 上を点 X_1 から X_2 まで動く。



($\triangle XMY$ の面積) $= 4 \times$ ($\triangle XMP$ の面積)
であり、 $\triangle XMP$ の面積は、

点 X が辺 DE の中点 X_0 にあるとき最小
となり、

点 X が X_1 または X_2 にあるとき最大
となる。

$$MN = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad X_0P = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

より、 $\triangle XMY$ の面積の最小値は、

$$4 \times \frac{1}{2} \cdot MP \cdot X_0P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

となり、点 X_1 から直線 MN に下ろした垂線の足を H とすると、

$$X_1H = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{29}{216}}$$

より、 $\triangle XMY$ の面積の最大値は、

$$4 \times \frac{1}{2} \cdot MP \cdot X_1H = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \sqrt{\frac{29}{216}} = \frac{\sqrt{29}}{12}$$

