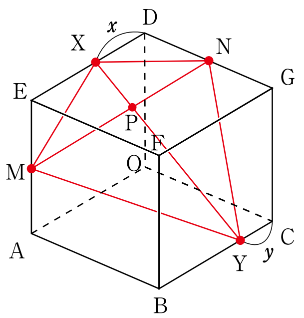
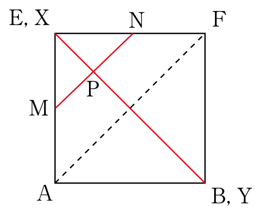
問題４ の別解

大阪府立大手前高等学校　ふかがわ ひさし 深川　久

4 点 X，M，Y，N が同一平面上にあるための必要十分条件は，対角線 MN と XY が交わることである。線分 XY は平面 DEBC 上にあるので，対角線 MN と XY が交点を持つとき，その交点は線分 MN と平面 DEBC との交点（P とおく）に一致する。

この立方体を面 ABFE 側から見ると（すなわち，下左図に表れるすべての点および線分を平面 ABFE に正射影すると）下右図のようになる。



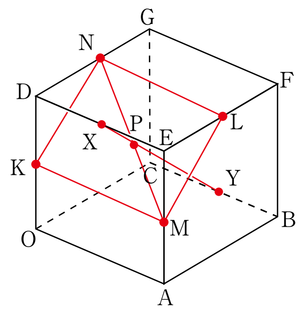


この図と，正射影は比を保つことから，点 P は線分 MN の中点であることがわかる。したがって，4 点 X，M，Y，N が同一平面上にあるための必要十分条件を，「線分 XY が線分 MN の中点を通ること」と言い換えることができる。

また，XP：PY＝1：3 であることもわかるので，△XMY の面積は△MYP の面積の$\frac{4}{3}$倍である。

よって，点 Y と直線 MN との距離が最小のとき求める面積も最小になり，距離が最大のとき求める面積も最大になる。

(1) 最小値を求める。



点 Y を線分 BC の中点にとる。このとき，線分 XY が点 P を通ることから，点 X は線分 DE の中点となる。

線分 OD の中点を K, 線分 EF の中点を L とする。平面 KMLN と直線 XY に注目する。直線 XY は，平面 KMLN 上の平行でない 2 直線 KM および ML に対して垂直だから，平面 KMLN 上のすべての直線に対して垂直であり，特に直線 MN に対して垂直である。また，直線 XY は直線 BC に対しても垂直である。したがって，このときの線分 PY は，2 直線 MN と BC の最短距離を与えている。よって，このとき△MYP の面積は最小であり，したがって△XMY の面積も最小である。最小値を求めると，

$$\mathrm{MP}=\frac{1}{2}\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\mathrm{PY}=\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

△XMY の面積の最小値は，$\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) 最大値を求める。

線分 BC の中点を U とする。点 Y が U に一致するとき，求める面積は最小であった。さて，点 Y が辺 BC 上の点であるとき，点 H を直線 MN 上の点で $YH \perp MN$ なるもの（点 Y から直線 MN へ下ろした垂線の足）とする。また，点 I を平面 MNU 上の点で $YI \perp$ 平面 MNU なるもの（点 Y から平面 MNU へ下ろした垂線の足）とする。このとき，

$$YH^2 = YI^2 + IH^2 = YI^2 + UP^2$$

が成り立つ。UP^2 は定数であり，直線 BC と平面 MNU とは点 U で交わっているので，Y が U から遠ざかるほど，YH の値は大きくなる。YH は, △MYP において MP を底辺と見たときの高さだから，Y が U から遠ざかるほど, △MYP の面積は大きくなる。したがって，Y が B または C にあるとき, △MYP の面積は最大である。なお，このときはじめに見た比例関係より，Y が点 B にあるとき X は線分 DE を 1：2 に内分する点，Y が点 C にあるとき X は線分 DE を 2：1 に内分する点となり，たしかに B は線分 DE 上にある。

最大値を計算する。Y が C に一致するとき，

$$MY = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{3}{2}$$

$$YN = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$NM = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

ここで，$NH = z$ とおくと，$MY^2 - (MN - z^2) = NY^2 - z^2$

これを解いて $z = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ だから，$YH = \sqrt{YN^2 - z^2} = \dfrac{\sqrt{29}}{2\sqrt{6}}$

したがって, △XMY の面積の最大値は次のようになる。

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{29}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{29}}{12}$$