問題３ の別解

銅賞

千葉県立浦安南高等学校

たきざわ　ひろし
滝沢　洋

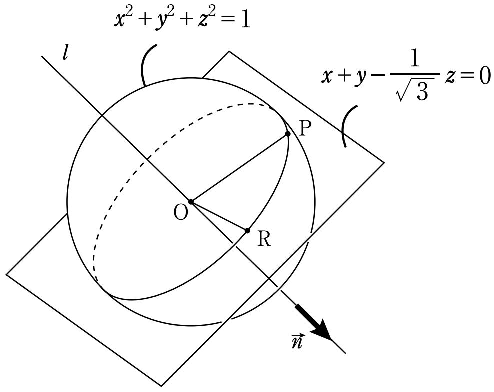
（答えの幾何学的解釈）

平面 $x+y-\frac{1}{\sqrt{3}}z=0$ の法線ベクトルの１つを，$\vec{n}=\left(1,\ \ 1,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ とする。また，原点Ｏを通り，この法線ベクトル $\vec{n}$ を方向ベクトルにもつ直線を l とする。

さて，

$$\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z\right)+\left(\frac{1}{2}\ y-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y+\frac{1}{4}z\right)=x+y-\frac{1}{\sqrt{3}}z=0$$

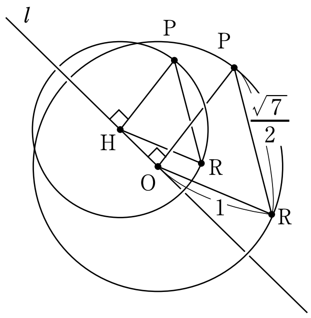
が成り立つので，点Ｐ（x，y，z）が平面 $x+y-\frac{1}{\sqrt{3}}z=0$ 上にあるとき，点Ｒ $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z,\ \frac{1}{2}\ y-\frac{\sqrt{3}}{2}z,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y+\frac{1}{4}z\right)$ もこの平面上にある。



同様に，点Ｐが平面 $x+y-\frac{1}{\sqrt{3}}z=d$ 上にあるとき，点Ｒもこの平面上にある。

一方，$\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ，点Ｐから直線 l に下ろした垂線の足をＨとすると，

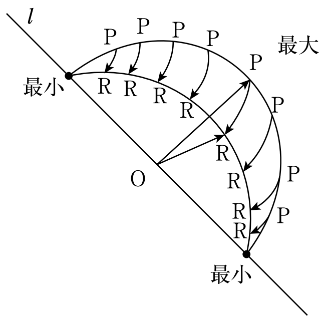
$$\begin{aligned}
\mathrm{PR}&=\sqrt{\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\left(x+y-\frac{1}{\sqrt{3}}z\right)^2}\\
&=\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}y-\frac{1}{\sqrt{7}}z\right)^2}\\
&=\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\left(\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)^2}\\
&=\frac{\sqrt{7}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\sqrt{1-\cos^2\theta}\\
&=\frac{\sqrt{7}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}\,\mathrm{PH}
\end{aligned}$$



と変形できる。

以上により，本問のイメージを図示すると，右のようになる。

西瓜の切り身を考えるとわかりやすい。



最後に，点Ｐが単位球面と直線 l との交点 $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$ となるとき，PQ は最小値０となることもわかる。