問題３ の別解

銅賞

大阪府立金岡高等学校　澳（おき）　泰生（やすお）

単位球面上の任意の点をＱとすれば，題意をみたすＰとＲがそれぞれ一意的に定まる。
そこでＱのとり方を，いろいろ変えるときの，PR の最大値を与えるＱを求める。
$Q(x, y, z)$，$P(x_1, y_1, z_1)$，$R(x_2, y_2, z_2)$（ただし $x^2+y^2+z^2=1$）とすれば，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} z_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos60^\circ & -\sin60^\circ \\ \sin60^\circ & \cos60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}$$

これより，

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = \dfrac{1}{2}y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}z \\ z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{1}{2}z \end{cases} \quad \cdots\cdots①
\qquad
\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}z \\ y_2 = y \\ z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}z \end{cases} \quad \cdots\cdots②$$

$$\begin{aligned}
4\mathrm{PR}^2 &= 4(x_1-x_2)^2+4(y_1-y_2)^2+4(z_1-z_2)^2 \\
&= (x-\sqrt{3}z)^2+(y-\sqrt{3}z)^2+(\sqrt{3}x-\sqrt{3}y)^2 \\
&= 4x^2+4y^2+6z^2-6xy-2\sqrt{3}yz-2\sqrt{3}zx \\
&= 7(x^2+y^2+z^2)-(3x^2+3y^2+z^2+6xy+2\sqrt{3}yz+2\sqrt{3}zx) \\
&= 7-(\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+z)^2 \\
&\leqq 7
\end{aligned}$$

これより PR は $\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+z=0$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ をとる。

$\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+z=0$ と $x^2+y^2+z^2=0$ をみたす点Ｑの一例として $Q\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ をとると，このときのＰは①より
$P\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$

答　$P\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$