

問題3 の別解

銅賞

東京都立井草高等学校

くろさわ
黒澤

まさのぶ
正信

条件を満たす点を、 $P \rightarrow Q \rightarrow R$ と表す。点 Q と $y=x$ に関して対称な点 B について、 $A \rightarrow B \rightarrow C$ のとき、 $PR=AC$ となる。
 P と C 、 Q と B 、 R と A は $y=x$ について対称であり、点 $PCRA$ が四角形を作るとき等脚台形となる。
 今、 $Q(x, y, z)$ 、 $B(y, x, z)$ とする。

$$\text{軸の回りの、} -60^\circ \text{ の回転は、} \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

と表され、 P, R, A, C は、それぞれ Q と B を -60° 回転した点だから、

$$\begin{aligned} P & \left(x, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, -\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z \right) & R & \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z, y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z \right) \\ A & \left(y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z \right) & C & \left(\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, x, -\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z \right) \\ \vec{PC} &= \left(-x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z, 0 \right) \\ \vec{AR} &= \left(\frac{1}{2}x - y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, -\frac{1}{2}x + y - \frac{\sqrt{3}}{2}z, 0 \right) \text{ となる。} \end{aligned}$$

また、 PC の中点を M 、 AR の中点を N として、

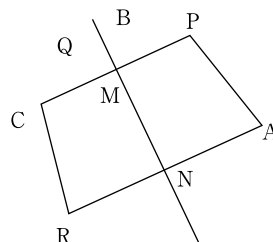
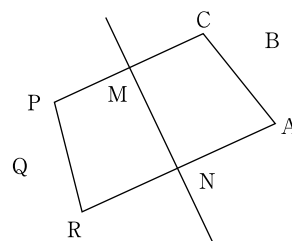
$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z, -\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z \right) \\ \vec{ON} &= \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z, \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z \right) \\ \vec{MN} &= \vec{ON} - \vec{OM} = \left(-\frac{1}{4}(x-y), -\frac{1}{4}(x-y), -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-y) \right) \end{aligned}$$

$PCRA$ は等脚台形 ($x \neq y$) を作るから、 $x=y$ のときも含めて、

$$\vec{PR} = \frac{\vec{PC} + \vec{AR}}{2} + \vec{MN} \text{ である。}$$

また、 $\vec{PC} \perp \vec{MN}$ 、 $\vec{AR} \perp \vec{MN}$ 、 $\vec{PC}$ と $\vec{AR}$ は平行である。
 したがって、

$$\begin{aligned} |\vec{PR}|^2 &= \left(\frac{|\vec{PC} + \vec{AR}|}{2} \right)^2 + |\vec{MN}|^2 \\ \frac{|\vec{PC} + \vec{AR}|}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left| -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \sqrt{3}z \right| = \frac{\sqrt{2}}{4} |x + y - 2\sqrt{3}z| \\ &= \frac{\sqrt{7}}{2} \left| \frac{x}{\sqrt{14}} + \frac{y}{\sqrt{14}} - \frac{2\sqrt{3}z}{\sqrt{14}} \right| \\ |\vec{MN}| &= \frac{\sqrt{14}}{4} |x - y| = \frac{\sqrt{7}}{2} \left| \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \right| \end{aligned}$$



原点中心半径 1 の球面上の点 Q (x, y, z) について,

$$\vec{OQ} = (x, y, z) \text{ と } \vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}} \right) \text{ の内積は } \frac{x}{\sqrt{14}} + \frac{y}{\sqrt{14}} - \frac{2\sqrt{3}z}{\sqrt{14}}$$

$$\vec{OQ} = (x, y, z) \text{ と } \vec{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \text{ の内積は } \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は単位ベクトル, $\vec{a} \perp \vec{b}$ である。

$\vec{OQ}$ を $\vec{OQ}$ を含み $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のつくる平面と垂直な平面上を原点 O を中心として回転させることを考える。

$\vec{OQ}$ と $\vec{a}$ のなす角を θ とすると, $\cos^2 \theta$ の値は, $\vec{OQ}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のつくる平面上まで回転したとき最大となる。

また,

$\vec{OQ}$ と $\vec{b}$ のなす角を ϕ とすると, $\cos^2 \phi$ の値も, $\vec{OQ}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のつくる平面上まで回転したとき最大となる。

$|\vec{OQ}| = |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ であるから,

このとき, $\vec{OQ} \cdot \vec{a} = \cos \theta$ $\vec{OQ} \cdot \vec{b} = \cos \phi$ となる。

また, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 90° であるから, $|\cos \phi| = |\sin \theta|$ となる。

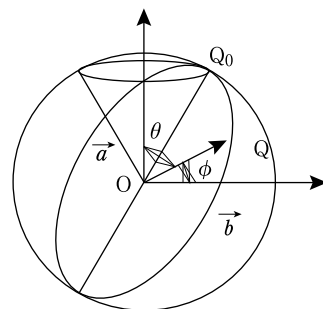
$$\begin{aligned} |\vec{PR}|^2 &= \left(\frac{|\vec{PC} + \vec{AR}|}{2} \right)^2 + |\vec{MN}|^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \left| \frac{x}{\sqrt{14}} + \frac{y}{\sqrt{14}} - \frac{2\sqrt{3}z}{\sqrt{14}} \right| \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \left| \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \right| \right)^2 \\ &\leq \frac{7}{4} (\cos^2 \theta + \cos^2 \phi) = \frac{7}{4} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上の点 Q が

$\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}} \right)$ と $\vec{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ のつくる平面上にあるときに PR の長さは最大となる。

したがってそのような点 P の具体例は,

$$Q \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \text{ とおくと, } P \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{4} \right) \text{ である。}$$



$\cos^2 \theta$ $\cos^2 \phi$ の値が最大となる理由は, O を頂点とし, Q_0 を通り $\vec{a}$ に垂直な円盤を底面とする円錐を考える。