問題３ の別解

銀賞

岡山白陵中学校・高等学校

寳木（たからぎ）　道郎（みちお）

P $(x,\ y,\ z)$，Q $(x',\ y',\ z')$，R $(x'',\ y'',\ z'')$ とおく。

$$x'=x,\quad \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} y-\sqrt{3}\,z \\ \sqrt{3}\,y+z \end{pmatrix}$$

$$y''=y',\quad \begin{pmatrix} z'' \\ x'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} z'-\sqrt{3}\,x' \\ \sqrt{3}\,z'+x' \end{pmatrix}$$

よって，$x''=\dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\,y+z)+x\right\}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}y+\dfrac{\sqrt{3}}{4}z$

$$y''=\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z$$

$$z''=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y+\frac{1}{4}z$$

P から R への座標変換を，原点を通り方向ベクトル $\vec{p}=(p,\ q,\ r)$ の直線を軸とした座標変換と考えると，P が $(p,\ q,\ r)$ のとき R は $(p,\ q,\ r)$ となるから，

$$p=\frac{1}{2}p+\frac{3}{4}q+\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

$$q=\frac{1}{2}q-\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

$$r=-\frac{\sqrt{3}}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{4}q+\frac{1}{4}r$$

これを解くと，方向ベクトルは $\vec{p}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ とおける。

この変換で PR が最大となるのは，変換の軸と P の距離が最大になるとき，すなわち，$\vec{p}$ を法線ベクトルとし原点を通る平面 $x+y-\dfrac{1}{\sqrt{3}}z=0$ と，球 $x^2+y^2+z^2=1$ の共有する円上に点 P があるときである。

このような点 P の 1 つは $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ である。