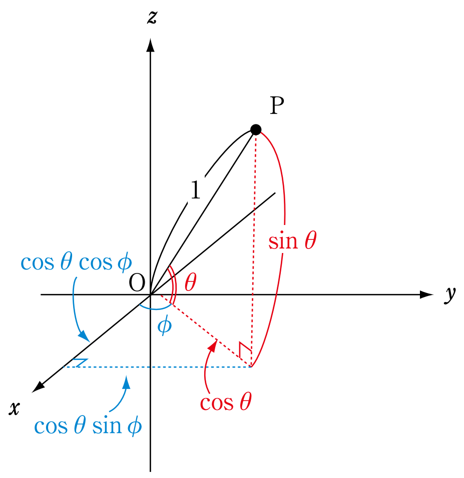
問題３ の別解

銀賞

京都市立伏見工業高等学校

みうら こういちろう
三浦幸一郎



Ｐの座標をまず示す。

x 軸正の向きから y 軸に ϕ，xy 平面から z 軸正の方向に θ の位置にあり，OP＝1 となるような点をＰとして，

$$\mathrm{P}(\overset{x_p}{\overset{\parallel}{\cos\theta\cos\phi}},\ \overset{y_p}{\overset{\parallel}{\cos\theta\sin\phi}},\ \overset{z_p}{\overset{\parallel}{\sin\theta}})$$

と表せる。

$$\mathrm{Q}(x_q,\ y_q,\ z_q),\ \mathrm{R}(x_r,\ y_r,\ z_r)$$

とおく。

条件より，　$x_q=\cos\theta\cos\phi$

$$\begin{pmatrix} y_q \\ z_q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos60^\circ & -\sin60^\circ \\ \sin60^\circ & \cos60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta\sin\phi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\sin\phi+\frac{1}{2}\sin\theta \end{pmatrix}$$ となる。

さらに，　$y_r=y_q$

$$\begin{pmatrix} z_r \\ x_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos60^\circ & -\sin60^\circ \\ \sin60^\circ & \cos60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_q \\ x_q \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos60^\circ & -\sin60^\circ \\ \sin60^\circ & \cos60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\sin\phi+\frac{1}{2}\sin\theta \\ \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta\sin\phi+\frac{1}{4}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\cos\phi \\ \frac{3}{4}\cos\theta\sin\phi+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\cos\phi \end{pmatrix}$$ となる。

よって，　$\mathrm{PR}^2=(x_r-x_p)^2+(y_r-y_p)^2+(z_r-z_p)^2$

$$=\left(\frac{3}{4}\cos\theta\sin\phi+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\cos\phi\right)^2$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\phi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta\sin\phi-\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\cos\phi\right)^2$$

$$=\cos^2\theta\sin^2\phi+\frac{3}{2}\sin^2\theta+\cos^2\theta\cos^2\phi-\frac{3}{2}\cos^2\theta\cos\phi\sin\phi+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\sin\theta\cos\phi+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\sin\theta\sin\phi$$

$$=\cos^2\theta+\frac{3}{2}\sin^2\theta-\frac{3}{2}\cos^2\theta\cos\phi\sin\phi+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\sin\theta\,(\cos\phi+\sin\phi)\quad\cdots(*)$$ となる。

ここで，　$(\cos\phi+\sin\phi)^2=1+2\sin\phi\cos\phi$　より，

$$\sin\phi\cos\phi=\frac{(\cos\phi+\sin\phi)^2-1}{2}$$ となる。

$\cos\phi+\sin\phi=X\ (-\sqrt{2}\leqq X\leqq\sqrt{2})$ として，

$$(*)=\cos^2\theta+\frac{3}{2}\sin^2\theta-\frac{3}{2}\cos^2\theta\times\frac{X^2-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\sin\theta\times X$$

$$=-\frac{3}{4}\cos^2\theta X^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\sin\theta X+\frac{7}{4}\cos^2\theta+\frac{3}{2}\sin^2\theta$$

$$=-\frac{3}{4}\cos^2\theta\left(X-\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{3\cos\theta}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\theta+\frac{7}{4}\cos^2\theta+\frac{3}{2}\sin^2\theta$$

$$=-\frac{3}{4}\cos^2\theta\left(X-\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{3\cos\theta}\right)^2+\frac{7}{4}$$ となる。

よって，$X=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{3\cos\theta}=\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\theta$ のとき，（＊）は最大値 $\frac{7}{4}$ をとる。

このとき，$X=\cos\phi+\sin\phi=\sqrt{2}\sin\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)$ より，

$$\sqrt{2}\sin(\phi+45^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\theta$$ が得られる。

この等式を満たす (θ,ϕ) の組の一つは $(\theta,\phi)=\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$。

そのときのＰは，$\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

ちなみに，大竹真一先生のＰは，上の式で，$(\theta,\phi)=\left(0,-\frac{\pi}{4}\right)$ のときである。