問題３ の別解

金賞

大阪府立大手前高等学校　深川　久（ふかがわ　ひさし）

x 軸を軸とする 60° 回転を f，y 軸を軸とする 60° 回転を g と書く。このとき，P と $\mathrm{R}=(g\circ f)(\mathrm{P})$ との距離が最大になるような点 P を 1 つ求めたい。

回転の合成 $g\circ f$ はまた，ある直線を軸とする回転である。$g\circ f$ の回転軸を求めるため，以下の 3 点の移動先を求める。

(1) 原点 O は x 軸，y 軸のいずれを軸とする回転でも動かないので，$g\circ f$ で動かない。

(2) x 軸上の点 A（1，0，0）は，x 軸を軸とする回転では動かず，y 軸を軸とする 60° 回転では点 $\mathrm{A}'\left(\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ に移動する。

(3) 点 $\mathrm{B}\left(0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ は，x 軸を軸とする 60° 回転により y 軸上の点 B′（0，1，0）に移動し，この点 B′ は y 軸を軸とする回転で動かない。

(1)，(2) より，求める回転軸は線分 AA′ の垂直 2 等分平面上にある，原点を通る直線である。線分 AA′ を垂直 2 等分する平面の方程式は，

$$z=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

である。

(1)，(3) より，求める回転軸は線分 BB′ の垂直 2 等分平面上にある，原点を通る直線である。線分 BB′ を垂直 2 等分する平面の方程式は，

$$z=-\frac{1}{\sqrt{3}}y$$

である。

これら 2 平面の共通部分である直線が $g\circ f$ の回転軸である。この軸を l とおくと，l の方程式は，

$$x=y=-\sqrt{3}\,z$$

となる。直線 l の方向ベクトルとして $\vec{d}=(\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ -1)$ がとれる。直線 l を軸とする回転によって移動前と移動後の点の距離が最大になるような点は，直線 l に垂直な平面と単位球面の共通部分である大円上の点である。l（したがって $\vec{d}$）に垂直な単位ベクトルの一つとして

$$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$$

が取れるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{n}$ なる点 P，すなわち

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$$

が求める点の 1 つである。