問題２ の別解

銅賞

島根県立松江南高等学校　長野（ながの）　宏（ひろし）

正方形$ABCD$の一辺の長さをaとする。
まず$\triangle B'DE$の三辺の長さの和が$2a$となることを示す。

辺BGの長さをxとすると　$GB'=x,\ GC=a-x,$

$CB'=\sqrt{GB'^2-GC^2}=\sqrt{2ax-a^2}$

これより$\triangle GCB'$の三辺の長さの和l_1は

$l_1=x+(a-x)+\sqrt{2ax-a^2}=a+\sqrt{2ax-a^2}$

また　$B'D=a-CB'=a-\sqrt{2ax-a^2}$ であり

$\triangle GCB' \backsim B'DE$であるから$\triangle B'DE$の三辺の長さの和を$l_2$とすると

$l_1 : l_2=GC : B'D=a-x : a-\sqrt{2ax-a^2}$

よって$l_2=\dfrac{l_1\times B'D}{GC}=\dfrac{(a+\sqrt{2ax-a^2})(a-\sqrt{2ax-a^2})}{a-x}=\dfrac{2a^2-2ax}{a-x}=2a$

以上で$\triangle B'DE$の三辺の長さの和が$2a$であることが示された。

$\triangle B'DE$の内接円と辺$EB', B'D, DE$との接点をそれぞれH, K, Jとすると
$JE=EH, B'K=B'H$がいえて

$2a=DE+EB'+B'D=(DJ+JE)+EB'+(B'K+KD)$

$=(r+JE)+EB'+(B'K+r)=2r+(JE+B'K)+EB'$

$=2r+EB'+EB'=2r+2EB'$　ゆえに$r=a-EB'$

また$A'E=a-EB'$であるから　$A'E=r$（証明終）