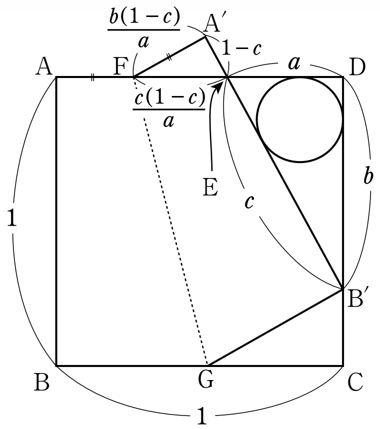
問題２ の別解

銀賞

（東京）広尾学園中学校・高等学校　中里（なかざと）　仁謙（まさのり）

別解



題意の正方形の１辺の長さを１とする。
ED$=a$，DB′$=b$，B′E$=c$ とすると，

$$a^2+b^2=c^2 \quad \cdots\cdots（*）$$

△A′EF∽△DEB′ より，

$$\text{A′E}=1-c,\quad \text{A′F}=\frac{(1-c)b}{a},\quad \text{EF}=\frac{(1-c)c}{a}$$

よって，

$$\frac{(1-c)b}{a}+\frac{(1-c)c}{a}+a=1 \quad \cdots\cdots(**)$$

（＊＊）より，（＊）の条件の下で

$$b-bc+c-b^2=a \iff a=(b+c)(1-b)$$

$$\therefore\quad a^2=(b+c)^2(1-b)^2=c^2-b^2 \quad (\because\ （*）より)$$

よって，$(b+c)(2-b)=2$ を得るからこれより，$a+b+c=2 \quad \cdots\cdots(***)$

ここで，△DB′E の内接円の半径を r とすると，

$$(a-r)+(b-r)=c \iff r=\frac{a+b-c}{2}$$

であるから，これと（＊＊＊）により，$r=1-c=$A′E

1　〈考え方…発想とその思考（変量と不変量の交錯）〉

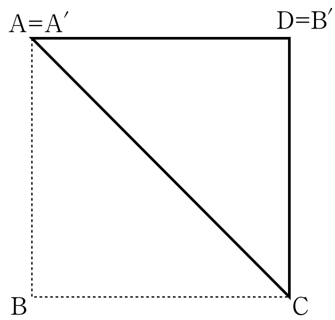
別解においては３つの思考が必要になる。

まず，思考側が描く図に対して，ある程度の自由度が与えられている本問のような問題において，発想のポイントは，図形における最大・最小問題を扱うときのように，

どこの量が何に依存しているか

を考えることである。
内接円の半径 r が三角形 B′DE に依存していることと，出来上がる三角形 B′DE は直角三角形であり，またこれは B′ によって変化するから，この３辺の長さを設定すれば全体の変化をダイレクトに捉えられることが解るだろう。（もちろん変量のとり方は一様ではないので，私はここで全体の変化を捉えた，というだけです。）

次に，私たちが中学校の幾何で教わり，あるいは教えているように，初等幾何の問題は『不変量への着目』が解決の鍵になることもあるということを理解していることがポイントである。この問題は設定状況が解りやすく，別解の a，b，c は $\boldsymbol{a+b+c=const.}$ であることが予想できるだろう。（上でも述べたように，B′ に依存して図形が決まることに注意して B′ を少しズラせば，B′D が増減した分 DE が逆の変化をし，また強い束縛で変化するのでこの変化の差は極わずかだろうということと，さらには，EB′ が三平方により決定されるので，２次の微小 factor が消えるので，やはり大きな変化はほとんど見られないから）



ここまで解れば A$=$A′ で固定すれば良い。このとき，B′$=$D であるので，この場合の E を A と定義すれば，題意の正方形の１辺の長さを１として極限を考えれば，

$$\lim_{a\to 1}(a+b+c)=2$$

であるから，

$$\boldsymbol{a+b+c=2}$$

の関係が見てとれるだろう。

したがって，これを示すことが目標となる。
このときに，問題となるのが，直ちに得られている訳ではない部分の定量性を示すので，

題意から解る定量化要素を利用する

ことがポイントである。
本問で重要な『対称点』の情報を使いながら，a，b，c で表せるものとして，三角形の相似により捉えられる辺 AD を選んだ。

最後に，逆を考えることが重要である。
すなわち，以上の思考によって得られた条件式，

$$a^2+b^2=c^2 \quad \cdots\cdots（＊） \qquad \frac{(1-c)b}{a}+\frac{(1-c)c}{a}+a=1 \quad \cdots\cdots（＊＊）$$

を満たせば，題意の状況を築くことができるかどうかである。
普通の高校生にとっては（＊），（＊＊）までは容易にたどり着けても，ここが一番難しいだろう。
すなわち，

これから物事を解析するに足る十分な式を得たのか？　他にも必要なのか？

である。
和算といえば一般的には難しいが，本問が見た目より易しい問題であるのは，この処理が楽だからではないだろうか？
結局，2 つの条件式（＊），（＊＊）により題意の状況が構築できる（すなわち，他に得た relation は元々（＊），（＊＊）により得られた式でしかなく，議論を楽にする程度のものでしかない）ので，これが本問を捉える a，b，c の必要十分条件であることが解る。
後は，$\boldsymbol{a+b+c=2}$ を意識しながら，（＊），（＊＊）の 2 つを同値変形すれば良い。

以下に，解答では省略した計算の詳細を述べておこう。
以下は全て（＊）の条件の下による同値変形であることに注意されたい。

$$\begin{aligned}\frac{(1-c)b}{a}+\frac{(1-c)c}{a}+a=1 \quad &\Longleftrightarrow \quad (1-c)(b+c)+a^2=a\\ &\Longleftrightarrow \quad b-bc+c-c^2+(c^2-b^2)=a\\ &\Longleftrightarrow \quad (b+c)(1-b)=a \quad \cdots\cdots（☆）\end{aligned}$$

（この式（☆）は，後に $a+b+c$ の値を求める上で必要になるだろう。しかし，ここでは a の消去が第一の目標となる。もちろん，（＊）の条件の下なので，a が現実的に消去される訳ではない。）

b の定め方から $0<b<1$ により，この両辺を 2 乗しても同値であるから，

$$\begin{aligned}a^2=(b+c)^2(1-b)^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad c^2-b^2=(b+c)^2(1-b)^2\\ &\Longleftrightarrow \quad c-b=(b+c)(b^2-2b+1)\\ &\Longleftrightarrow \quad b^3-(2-c)b^2+(2-2c)b=0\\ &\Longleftrightarrow \quad b^2-(2-c)b+2-2c=0\\ &\Longleftrightarrow \quad (b+c)(2-b)=2\end{aligned}$$

よって，$(b+c)(2-b)=2$ を得ることからこれと（☆）より，

$$a+b+c=(b+c)(1-b)+b+c=(b+c)\{(1-b)+1\}=(b+c)(2-b)=2$$

（以上）

2 〈感想〉

図を見たとき（＊＊＊）はおおよそ解っていましたが，実際に示せたときは「予想通りっ！」と少し感動しました。
時間の関係上，簡略的な解説で申し訳ありません。
残念なことは，「冷静に見ると模範解答の方が鮮やかであること」「計算がメインで面白みに欠ける」ことです。
逆に良い点は「余計な補助線は一切不要」「模範解答では得られない定量関係式を見ることができる」などではないでしょうか？
ただ，面白い幾つかの同値な関係がありますので，どれかに着目すればもっと良い解法もあるかもしれませんね。

1. $a+b+c=2$
2. $2r=ab$　（つまり，$\triangle \mathrm{B'DE}=r$）
3. $(1-a)(1-b)=1+c$
4. $(2-a)(2-b)=2$　（これは以上と同値ではないですが…）