平成22年度

大学入試センター試験 および 国公立大二次・私大

大学入試

分析と対策

数 学

学校法人　河合塾
数学科講師 福眞 剛司

啓林館

この冊子の内容は次のURLからもアクセスできます
http://www.shinko-keirin.co.jp/kosu/index.htm

本稿ではいくつかの入試問題を引用していますが，紙面の都合上，設問の一部を省略したり，表現を改変したりした箇所があります。
なお，大学入試センター試験の問題はトピックスが多いため，問題文の引用をしていません。2次試験，私大の試験でも問題文を引用していない箇所があります。問題文については河合塾のホームページなどをご覧ください。

0. はじめに

平成22年度大学入試は，現行学習指導要領による5回目のものとなった。現行課程での出題傾向は安定してきている一方，次期学習指導要領による大学入試が（数学については）平成27年度から始まることとなり，少しずつではあるが変化の兆しが見られるようである。

その観点から今後の受験生指導の参考とすべく，平成22年度の大学入試問題を分析していきたい。なお，以下において，「今年度」とは平成22年度，「昨年度」とは平成21年度，「来年度」とは平成23年度を指す。

1. 大学入試センター試験

ここでは，大学入試センター試験（以下，「センター試験」）本試の『数学Ⅰ・数学Ａ』および『数学Ⅱ・数学Ｂ』の2科目（以下，『数ⅠＡ』『数ⅡＢ』と略記）のみの分析を行うこととする。

以下，いくつかのトピックスに分けて今年度のセンター試験を分析したい。

①難易度の変化

出題分野，大問ごとの配点等は昨年度と全く変わっていない。ここでは，現行学習指導要領によるセンター試験（過去5年分）の平均点と標準偏差をまとめてみることにする。

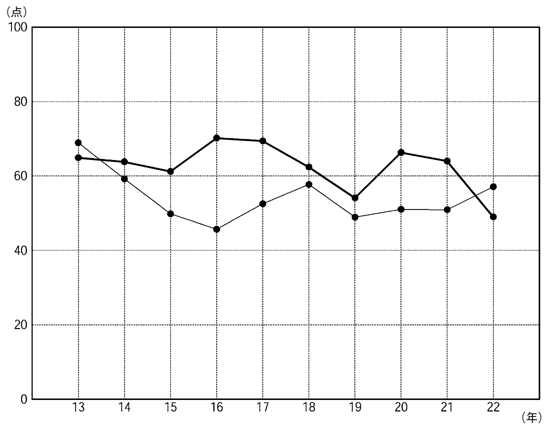
『数学Ⅰ・数学Ａ』

年度	平均点	標準偏差
平成22年度	48.96	19.63
平成21年度	63.96	22.12
平成20年度	66.31	23.55
平成19年度	54.06	18.60
平成18年度	62.36	21.70

『数学Ⅱ・数学Ｂ』

年度	平均点	標準偏差
平成22年度	57.12	23.20
平成21年度	50.86	19.35
平成20年度	51.01	21.10
平成19年度	48.94	23.92
平成18年度	57.66	23.52

本年度を含めて，過去10年間の平均点の推移をグラフで見ると以下のようになる。ただし，太線が『数ⅠＡ』，細線が『数ⅡＢ』の平均点を表している。



一目でわかるように，『数ⅠＡ』の平均点が『数ⅡＢ』のそれを下回ったのは平成13年度以来である。現行課程入試（平成18年度より）では初めてのことである。

受験者数は『数ⅠＡ』がおよそ37万人，『数ⅡＢ』がおよそ33万人であり，『数ⅠＡ』の受験者が約4万人

多いので，一概には言えないが，今年度は『数ⅠA』の方が点数が取りにくかったようである。

『数ⅡB』の平均点は昨年より大幅に増加しているが，標準偏差が昨年に比べてかなり増加していることを考えると，上位生と下位生の点差は昨年度より大きくなったということができるであろう。詳しくは次項以降で分析したい。

なお,『数ⅠA』の平均点が50点を下回るのはあまり好ましくないので，この傾向は今年度限りである可能性が高い。『数ⅡB』に関しては今年度より多少平均点が増える程度が望ましいと考える。

今年度の2科目の平均点を単純に加えてみると106.08 点となり，昨年より9点程度下回っている。適切な差がつくのでよい，という意見もあるだろうが，センター試験としてはもう少し高い平均点を目指すべきであろう。

②答案再現分析

河合塾では，センター試験終了後「答案再現分析」を実施している。これは受験生および高校の先生等にご協力をいただいて，受験生がどの問題にどのマークをしたかを調査したものである。今年度は10,569 件の回答を得,『数ⅠA』で 9,050 件,『数ⅡB』で 8,634 件のデータを収集した。

数学のセンター試験においては，直前の設問の結果を用いて解答していくことが多いので，どの問題で正答率が低下したかを見ることで，受験生の弱点の傾向がわかることが多い。ここで，ご協力いただいた受験生および先生方に改めて感謝し，このデータを分析の一つの観点として利用することとする。

なお，答案再現分析による平均点は『数ⅠA』で54.4 点,『数ⅡB』で 63.0 点であった。答案再現分析により抽出された標本は，全母集団にくらべてやや上方に分布しているものであることをあらかじめご了解いただきたい。

まず，各問題ごとの平均得点率（各問題の満点に対する得点の割合）を見ていくことにする。なお，受験生全体の平均については，（　）内に昨年度のデータを付し，対前年比較の参考とする。

『数学Ⅰ・数学 A』

大問	配点	全体（%）	現役（%）	高卒（%）
1［1］	8	86.2 (83.0)	86.2	86.2
1［2］	12	57.5 (52.0)	56.7	61.7
2	25	78.8 (78.0)	77.2	83.2
3	30	39.3 (75.3)	37.0	46.3
4	25	36.0 (60.8)	34.0	42.0

第3問（図形と計量・平面図形）および第4問（場合の数と確率）の得点率が昨年度よりもかなり減っていることが読み取れる。

『数学Ⅱ・数学 B』（第5問以降は省略）

大問	配点	全体（%）	現役（%）	高卒（%）
1［1］	12 （14）	90.0 (79.3)	88.3	94.1
1［2］	18 （16）	61.1 (58.0)	58.9	68.9
2	30	70.3 (58.0)	68.3	76.3
3	20	50.0 (48.0)	47.0	58.0
4	20	52.5 (43.0)	50.0	58.5

昨年度より飛び抜けて得点率が高かったのは，第1問［1］（指数・対数）と第2問（微分法・積分法）であり,これらが平均点を押し上げた原因であろう。また，昨年度選択問題の得点率が低かった原因の一つは，分量が多かったことであると思われるが，今年は選択問題までゆっくり考えることができた受験生が多かったようである。

③問題分析

次に，各問題についていくつかのコメントを述べ

ておくことにする。なお，以下のコメント中の正答率は，前節で述べた「答案再現分析」をもとにしている。なお，偏差値帯 45.0〜54.9 に属する受験生を「中位生」とし，それより上位の生徒を「上位生」，下位の生徒を「下位生」としている。

まず，『数ＩA』について。

第1問［1］は「方程式と不等式」からの出題であった。無理数の計算，2次方程式の解，大小比較の融合問題であるが，**キ** までは下位生でも80% 以上の正答率があり，やさしい問題であった。大小比較の **ク** の正答率は75% であった（下位生は61%）。

第1問［2］は「集合と論理」からの出題であった。ベン図を選ぶ問題は新傾向である。また，最も正答率の低かった問題は **コ** である。$S \subset R$ から $\overline{R} \subset \overline{S}$ となることに気づく必要がある。正答率は33%（上位生でも47%）であった。この分野は，集合の考え方を大切にしながら指導したい。

第2問は「2次関数」からの出題であった。頂点に関する出だしの問題では，下位生の正答率が70% であり，ここでつまずくと最後までひびいてしまう。最後の平行移動量の問題の正答率は上位生と下位生の正答率の差は60ポイント以上ある。演習量の差が現れる問題である。

第3問は「図形と計量・平面図形」からの出題であった。設定はとても美しいが，**イ** 〜 **エ** ですでに正答率は 42%（上位生でも76%）であった。余弦定理を用いる前に，直角三角形の辺の長さの比から $\cos\angle\mathrm{BAC}$ を求めなければならず，2段階の思考が必要である。**コ** 〜 **ス** は方べきの定理からすぐに得られるが，それ以降は上位生でも正答率が6割を下回っている。

第4問は「場合の数・確率」からの出題であった。**エオ** の正答率は32%（上位生でも61%）である。これは数字の選び方 ${}_5\mathrm{C}_4$ 通りと色の選び方 2^4 通りを掛ければ得られるが，後者の「重複順列」的な考え方が難しかったと思われる。センター試験対策としても，いろいろな場合の数の求め方を練習させておきたい。

次に，『数ⅡB』について分析する。

第1問［1］は「指数関数・対数関数」からの出題であった。解と係数の関係（の逆）との融合問題であるが，正答率は高く，すべての問題で正答率は7割を超えている。

第1問［2］は「三角関数」からの出題であり，方程式 $\sin 4\theta = \cos\theta$ を満たす θ に対して，$\sin\theta$ を求める問題である。問題文は長文であり，細字の解答欄が多くて鬱陶しい。ただし，誘導にうまく乗ることができれば難しくはない。最後の **ヌ** 〜 **ハ** の正答率は上位生で57%，下位生で1% とかなりの開きがあった（全体の正答率は26%）。

第2問は「微分法・積分法」からの出題である。最初の設問で，接線が点（1，0）を通る条件が問われており，センター試験としてはハードルがかなり高い。**エオ** の全体の正答率は9割を超えているが，下位生の正答率は 53% であり，最初からかなりの差がついている。**チ** 〜 **テ** でも上位生の正答率は9割を超えている。

第3問は「数列」からの出題である。群数列が出題された。頻出問題である **コ** 〜 **ス** の正答率は4割程度であり，演習量の不足が感じられる。問題は決して難しくないので，センター試験対策の練習としては高3の初期から用いることができる良問である。

第4問は「ベクトル」からの出題である。多少の空間把握力があれば $\overrightarrow{\mathrm{XZ}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であることがわかり，**カ** がすぐ求められるが，下位生には難しかったようであり，下位生の正答率は4割を下回っている。このようにセンター試験のベクトルの問題は，頻出パターンを敢えて避けてはいるが，ある程度の図形認識力があれば難なく解けるものが多い。良問の演習を重ねるとよいだろう。

④センター試験の学習対策

前述のように，今年度の問題の難易度は例年とやや違っていたが，来年度は『数ＩA』はややややさしく，『数ⅡB』はやや難しくなる可能性が高い。

問題によって難易度に差があるので苦手分野を作らないことが最大の対策である。特に，図形問題に苦手意識をもつ生徒が多いので，年間計画の中で少

しずつ難しい問題にチャレンジさせていくとよいと思われる。

また，特に『数ⅡB』は時間が足りないという生徒が多く見られる。もちろん，多少の煩雑な計算ならばやってのけるだけの計算力は必要であるが，正しくはやく数式を処理する力も身につけさせたい。

2．2次・私大入試の総括

本項では，今年度に実施された2次試験，私大入試の問題を分析した結果，特に目立ったいくつかの項目について所見を述べたい。

①行列・1次変換の出題

次期学習指導要領による入試では，「行列」が出題される可能性はなくなった。

昭和53年告示の学習指導要領（「代数・幾何」の時代）が改訂され，「1次変換」が出題できなくなる直前には，1次変換の出題がかなり増加して「華々しい最期」を飾ったが，その再来を思わせるように，今年度は行列・1次変換の問題がやや増えたように感じられる。「在庫一掃処分」ではないが，これから数年間，この分野は要注意分野であろう。

まず，「行列」で注意しなければならないのはその代数的構造である。積の非可換性，零因子の存在など，実数の世界にはなかった性質に注目する問題は重要である。例えば，次の名古屋市立大の問題は有名問題であり，必ず解けるようにしておきたい。

> 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$（ただし，$b \neq 0$）が，ある自然数 $k\,(\geqq 3)$ に対して $A^k=O$ を満たすとき
>
> (1) 行列 A は逆行列をもたないことを示せ。
> (2) $A^2=O$ であることを示せ。
> (3) 0 でない実数を p，単位行列を E とおく。$A-pE$ が逆行列をもつことを示し，それを a，b，p で表せ。

また，北海道大では，$A^2-A+E=O$ を満たす行列 A が逆行列をもつことを証明する問題が出題されている。これは条件式を

$$A(E-A)=(E-A)A=E$$

のように変形すれば $A^{-1}=E-A$ であることがすぐにわかるが，「逆行列を求める」ことはできても「逆行列をもつことを示す」問題は手がつかない生徒が多い。今年度は，このような問題を目にする機会が多かった。

次に，1次変換について見ていくことにする。

多くの大学では，「点の移動」という建前を崩さないように問題文に工夫がされているが，今年度は福島県立医大で曲線 $y=x^2$ を行列 $\frac{1}{4}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ による1次変換で移した像を求める問題が出題されている。「図形の像」という考え方は是非扱っておきたいところである。

また，立命館大では，曲線 $x^2+xy+y^2=1$ を α だけ回転して標準形になるようにするという問題が出題された（問題文の表現としては「点の移動」）。その他の傾向として，実質的に不動直線を求める問題が目立つ。

なお，1次変換による図形の像を求める際には，「もとの図形の方程式を媒介変数で表してその像を求め，媒介変数を消去する」という方法が多く採られているが，可能ならば，逆行列を用いて図形の像を求める方法を扱っておいた方がよいだろう。

最後に，次の信州大学の問題を挙げておく。

> 2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が，$A^2=O$ を満たすとき
>
> (1) $a+d=ad-bc=0$ を示せ。
> (2) A が表す一次変換で，座標平面上の原点と任意の点 P，Q は同一直線上に移ることを示せ。

1次変換の意味がわかっていれば「当たり前」であるが，恐らく正答率は低かったのではないか。実質的に「非正則1次変換による座標平面全体の像」につながる問題であり，このテーマも扱っておきたい。

②整数問題

整数に関する出題も目立った。

次期の学習指導要領では,「整数の性質」という単元が数学 A に新設された。数学 A は平成11年公示の指導要領と同じく，分野を選択して学習することとなっている。「新指導要領において，たとえ出題範囲に数学 A を含まなくても，この程度は出題するよ」という大学側からのメッセージと受け取っておきたいところである。

さて，整数問題で最も目立つ問題は，次の首都大学東京の問題のような,剰余系に関するものである。

> ⑴ 整数の平方を 3 で割った余りは 0 または 1 であることを示せ。
>
> ⑵ 整数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，ab は 12 の倍数であることを示せ。

次に，不定方程式の問題は頻出パターンの問題も多いが，試行錯誤しながら解の条件を求めていくものもかなりあった。次の千葉大の問題を一例として挙げておく。

> 次の等式を満たす正の整数の組 $(k,\ n)$ をそれぞれ求めよ。
>
> ⑴ $3^n=k^3+1$
>
> ⑵ $3^n=k^2-40$

最後に，名古屋大の問題を挙げておく。

> ⑴ $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x$ のグラフ上に無限個の格子点が存在することを示せ。
>
> ⑵ a，b は実数で $a\neq 0$ とする。$y=ax^2+bx$ のグラフ上に原点以外の格子点が 2 つ存在すれば,無限個存在することを示せ。

a, b が有理数になることを示せばよいことに気づかなければいけないが, ⑴ がその絶妙な誘導になっている。

③公式の証明問題

今年も基本公式等の証明問題が出題されている。一例を以下に挙げる。

- 重心の性質（大阪教育大，佐賀大）
- 内接円の半径を求める公式，ヘロンの公式（大阪教育大）
- 三角関数の3倍角の公式（東北学院大）
- 三角形の面積の公式（秋田大）

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$

基本公式ではないが,神戸薬科大では, $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$，$\sin 4$ の大小比較の問題が出題されている。弧度法の意味を正しく理解しないと解けない問題である。

公式を使いこなす力だけでなく，公式を自分で証明したり，定義を正しく理解したりする能力が問われていると考えられる。

④近似値に関する問題

数年前から,計算結果の値を評価する問題も多い。2つの例を挙げておく。

- $\sin\dfrac{1}{2}$ の値を小数第3位まで（津田塾大）
- $\displaystyle\sum_{n=250}^{300}\frac{1}{n}$ の値を小数第2位まで（名古屋市立大）

上記の問題には，もちろん誘導はついているが，事前に何題か経験したことがないと解くのは難しいだろう。

なお，中央大では，$\sqrt{3}$ の近似や，複利計算での利率の近似値も出題されている。

⑤その他の問題

滋賀医科大の次の問題は微分方程式を解かせる問題である。適切な誘導がついており，学習指導要領の範囲で十分解答できる良問である。

> ⑴ a を実数の定数とするとき,微分可能な関数 $f(x)$ に対して次の等式が成り立つことを示せ。
>
> $$f'(x)+af(x)=e^{-ax}(e^{ax}f(x))'$$

(2)　(1) を利用して，次の等式を満たす関数 $f(x)$ で $f(0)=0$ となるものを求めよ。

$$f'(x)+2f(x)=\cos x$$

(3)　(2) の $f(x)$ に対して $\lim_{n\to\infty}|f(n\pi)|$ を求めよ。

また，東京理科大では次のような問題が出題された。

$S_k(n)=\sum_{j=1}^{n} j^k$ とする，

(1)　$S_2(n)$ を求めよ（誘導省略）。

(2)　$S_3(n)$ を求めよ（誘導省略）。

(3)　$k \geqq 2$ に対し，次を示せ。

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\left\{n^{k+1}-(-1)^k-\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}{}_{k+1}C_j S_j(n)\right\}$$

(1)，(2) は前項で述べた「基本公式の証明」であるが，(3) は $\sum_{j=1}^{n} j^k$ の漸化式を作る問題である。(1)，(2) で用いた手法を用いれば解決する。計算はやや煩雑であるが，面白い。

⑥出題ミス

今年度は，補足説明（試験会場で告知された問題の修正）のついている問題が多かった。また，数Ⅱ範囲で体積の問題（慶應義塾大），曲線の長さ（九州大）など範囲外の出題もあった。さらに，解答不能であることが事後に発覚する例も多かった。

名古屋大では，曲線と接線と y 軸が囲む面積を出題したが，囲む部分が2つあり，「どちらを求めても正解とする」というコメントを事後に出している（ただし，y 軸の左側の面積は事実上求められない）。筆者は，名古屋大入試当日，解答速報作成のために問題を解いていたが，囲む部分がどうしても2つ出てくるため，自分の計算ミスを疑い3回検算することになった。

同様の事例は山梨大でも起こった。「2曲線と y 軸の囲む面積を求める」という出題であったが，やはり2つの領域が考えられたため，試験中に「y 軸」を削除して「2曲線の囲む面積を求める」という問題に訂正された。学科によっては，問題訂正の告知が試験終了10分前であり，配点で考慮する旨の発表が大学側からなされている。

このような場合，解答が複数あることに気づいても，何も書かなければ得点はもらえない可能性がある。「自分はこう考えたのでこういう立場で解く」と宣言して，とりあえず解答を書き上げておくのが賢明である。直前期にはそのような指導も必要ではないか。

3．京都大の出題

平成19年度から京都大では理系の問題を，受験する学部・学科により，甲（標準）または乙（やや難）のセットのいずれかで出題している。昨年までと同様，いくつかの問題が甲乙間，文甲間で共通問題として出題されている。

また，学習指導要領によらない独自の出題範囲（以下「固有分野」）を募集要項に示している。今年度固有分野といえるものは文系 $\boxed{5}$ の1題のみであった。これは，座標空間に置かれた一辺の長さ 1 の立方体を，その対角線の周りに回転したときの体積を求める問題である。有名問題ではあるが，数学Ⅱで積分の意味を理解したからといってすぐに解ける問題ではない。京都大学の文系を受験する生徒には，昔の「基礎解析」時代の体積の問題を一通りやらせておきたいところである。

理系（乙）は他の理系学部との差別化を図るために出題されていると見ることもできるため，今後の対策としては，微分方程式，曲線の長さを含めて固有分野を一通り学習しておく必要があるだろう。

4．終わりに

今春，東京大受験予定者の答案を採点する機会があり，「条件○○を満たす最小の c を a_n とする」というような問題に出会った。出題の意図はもちろん，「条件を満たす定数 c としては，いろいろな値が考えられるけれども，そのうち最も小さいものを a_n とする」という意味である。ところが，4割以上の

生徒が，最初から c を a_n に置き換えて解き進めているのに驚いた。絶対に間違っているとまでは言わないが，違和感を覚える。問題文の意図をうまく読み取ることのできない生徒が多くなっているように感じる出来事であった。上位の生徒には，厳密であることの面白さを学ばせたいものである。

さて，昨年も書いたことであるが，ここ数年，生徒の計算力の低下が著しい。計算力がなければ大学入試に対応できない。入試問題を解きながら「この計算はどうやるんだったっけ」と考えていると，解答の流れを理解しにくくなる。思考力を高めるためにも計算力は必須であり，どのレベルの生徒に対しても，できるだけ多くの演習の機会を与える必要があるだろう。

新学習指導要領の施行まであと2年を切った。どのような生徒を預かるにしても，その可能性を十分に引き出せるような指導法を考えていかなければならない。河合塾としても，新学習指導要領の分析が進んでおり，高等学校の先生方には，できるだけ早い機会に情報を提供したいと考えている。

■福眞剛司（ふくま・つよし）
河合塾にて高1～高3，大学受験科で標準レベルからトップレベルの授業を幅広く担当。教材では全国テキスト，マーク模試作成を担当。
著書：「マーク式基礎問題集13　数学Ⅰ・A［1問1わざ］」（河合出版）〈共著〉