

目次

第 1 章	微積分（数学Ⅱ）の落ち穂拾い	3
1.1	微分の応用	3
●	合成関数	3
●	合成関数の微分	3
●	積の微分	4
1.2	回転体の体積	6
●	x 軸中心の回転体	6
●	y 軸中心の回転体	7
●	バウムクーヘン型積分	8
第 2 章	関数と極限	9
2.1	関数と逆関数	9
2.2	無理関数	10
2.3	分数関数と極限	12
●	直交双曲線	12
●	分数関数と極限	14
2.4	極限と数列	15
●	数列の極限	15
●	極限の計算	16
●	直感的な極限の計算と不定形	16
●	極限値の大小関係	18
●	無限等比数列	18
2.5	無限級数	20
●	無限級数	20
●	無限等比級数	21
●	循環小数	21
●	無限級数の応用	22
2.6	関数の極限	23
●	関数の極限と計算	23
●	指数・対数関数と極限	26
●	三角関数と極限	26
2.7	連続関数	27
第 3 章	微分法	30
3.1	整式の微分と応用	30
●	導関数	30
●	整式の微分再び	31
●	商の微分	31
●	逆関数の微分	32

●	陰関数の微分	33
●	高次導関数	34
3.2	いろいろな関数の微分	35
●	三角関数の微分	35
●	対数関数の微分	36
●	指数関数の微分	37
●	極限と e	37
●	対数微分法	38
●	媒介変数表示	39
3.3	微分と傾き	40
●	接線と法線の方程式	40
●	共通接線	41
●	2 曲線が接する条件	41
●	平均値の定理	42
3.4	グラフの利用	43
●	増減表と極値	43
●	最大値と最小値	44
●	方程式と不等式	44
3.5	いろいろな関数のグラフ	46
●	第2次導関数と曲線の凹凸	46
●	漸近線	47
●	分数関数のグラフ	49
●	無理関数のグラフ	50
●	三角関数のグラフ	52
●	指数関数のグラフ	52
●	対数関数のグラフ	53
●	対称性	54
3.6	物理的思考	55
●	1 次元の運動	55
●	2 次元の運動	56
●	さまざまな量の変化率	56
3.7	近似式	57
●	1 次式近似	57
●	マクローリン展開	58
A.	巻末問題	60
●	1 章	60
●	2 章	60
●	3 章	60
索引		62

第1章

微積分（数学II）の落ち穂拾い

この章では落ち穂拾いと称して数学IIで学んだ「整式の微積分」でやり残していることを学習する。

1.1 微分の応用

● 合成関数

関数 $y = (2x+1)^3$ を考える。この関数は $2x+1$ の部分をひとかたまりとみて、 $y = t^3$ の形をしているとも考えられる。

つまり、関数 $y = (2x+1)^3$ は $t = 2x+1$ という関数と、 $y = t^3$ という関数を合わせたものである。

$$\begin{cases} t = f(x) = 2x+1 \\ y = g(t) = t^3 \end{cases}$$

とおけば $y = g(t) = g(f(x))$ と表される。

この式で t を用いず $y = g(x) = x^3$ となっても $g(f(x))$ を考えることはできる。つまり、

$$\begin{cases} f(x) = 2x+1 \\ g(x) = x^3 \end{cases}$$

に対して、 $g(x)$ の x の部分に $f(x)$ を代入したと考えればよい。いずれの場合も、 $g(f(x)) = (2x+1)^3$ となる。

このように、ある関数 $f(x)$ と $g(x)$ を合わせて考えられる関数 $g(f(x))$ を f と g の**合成関数**という。

$g(f(x))$ を $(g \circ f)(x)$ と表す。よって、 f と g の合成関数は記号で $g \circ f$ とかく。

なお、この例において $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2x^3+1$ となるので、一般に $f \circ g$ と $g \circ f$ が等しいとは限らない。

例1 $f(x) = 2^x$, $g(x) = x+1$ のとき 合成関数 $g(f(x)) = 2^x + 1$ となる。

例2 $f(x) = 1-x$, $g(x) = \log_2 x$ のとき合成関数 $g(f(x)) = \log_2(1-x)$ となる。ただし、この場合は真数条件から $g(x)$ の定義域は $x > 0$ である。よって、 $(g \circ f)(x)$ を考えるときには $f(x)$ の値を $g(x)$ に代入するため、 $f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域の中に入っていないといけない。

よって、正確には $f(x) = 1-x$ ($x < 1$), $g(x) = \log_2 x$ ($x > 0$) とそれぞれの定義域を与えた上で合成関数を考えなければならない。

問題1 $f(x) = 2x^2$, $g(x) = x^2 - 1$ のとき $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ を求めよ。

● 合成関数の微分

関数 $y = f(x)$ の微分は

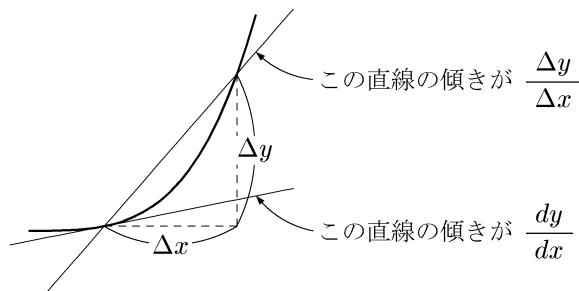
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で定義された。これは、グラフにおいて x における瞬間の傾きを計算したものであるから

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \text{ とみて、} x \text{ から } x+h \text{ までの間の } y \text{ の変化量を } \Delta y, x \text{ の変化量（この場合は } h \text{ である）を } \Delta x \text{ と模式的に表せば、}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

となる。つまり $y = f(x)$ の微分は x の変化量 Δx に対する y の変化量 Δy の割合 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限であると考えられる。実は微分の記号 $\frac{dy}{dx}$ にはそのような意味がある。



では、関数 $y = (x^2+1)^3$ の微分を考えてみよう。実際には展開して微分してしまうのが手っ取り早いですが、これを合成関数で見ると、

$$\begin{cases} t = f(x) = x^2+1 \\ y = g(t) = t^3 \end{cases}$$

として $y = g(t) = g(f(x))$ と表される。

このとき、合成関数の微分 $\frac{dy}{dx}$ は x の変化量 Δx に対する y の変化量 Δy の割合 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限である。

関数 f と g において同様に $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ を考えることができる。ここで

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

が成り立つ。これは分数の計算として明らかである。ここで両辺の極限を考えると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

となる。よって合成関数の微分は、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 3t^2 \cdot 2x = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x$$

となる。

合成関数の微分

$t = f(x)$, $y = g(t)$ のとき、

合成関数 $y = g(f(x))$ の微分は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

である。または、

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

とも表される。

例題 1 次の関数を微分せよ。

$$(1) y = (3x - 1)^5 \quad (2) y = (2x^3 + x - 1)^3$$

解) (1) $t = 3x - 1$ とおくと $y = t^5$ 。

$$\frac{dt}{dx} = 3, \quad \frac{dy}{dt} = 5t^4 \text{ であるから,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 15(3x - 1)^4$$

(2) $t = 2x^3 + x - 1$ とおくと $y = t^3$ 。

$$\frac{dt}{dx} = 6x^2 + 1, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 \text{ であるから,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 3(2x^3 + x - 1)^2(6x^2 + 1) \quad \blacksquare$$

(1) より特に次の公式が成り立つ。よく用いられるので、覚えておくとうい。

$(ax + b)^n$ の微分

$y = (ax + b)^n$ のとき、

$$y' = na(ax + b)^{n-1}$$

合成関数の微分は**ひとかたまり**となっているところを 1 つの変数だと考えて微分し、最後にそのひとかたまりの部分の微分したものをかけると覚えるとよい。

問題 2 次の式を微分せよ。

$$(1) y = (2x + 3)^4 \quad (2) y = (1 - x)^5 \\ (3) y = (x^2 + 1)^3 \quad (4) y = (x^2 + x + 1)^2$$

この問題でもそうだが、ひとかたまりとなる部分はたいていの場合括弧でくくられているため、括弧の部分を微分して、最後に**中身の微分**をかけると考えてもよい。

問題 3 等式 $\frac{d}{dx} \int_{-x}^x f(t)dt = f(x) + f(-x)$ が成り立つことを示せ。

● 積の微分

ここではかけ算の形をしている関数の微分を考える。つまり、 $y = (x + 1)^3(x - 2)^4$ のような関数である。この場合、 $f(x) = (x + 1)^3$, $g(x) = (x - 2)^4$ とおくと $y = f(x)g(x)$ と積の形に表される。

積の微分は、微分の定義から求めることができる。定義では x から $x + h$ までの y の値の変化を考えて $h \rightarrow 0$ とした極限を取るのだから、

$$\begin{aligned} & f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x) \\ &= f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x + h) \\ & \quad + f(x)g(x + h) - f(x)g(x) \\ &= (f(x + h) - f(x))g(x + h) \\ & \quad + f(x)(g(x + h) - g(x)) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & \frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x + h) - f(x)}{h} g(x + h) \\ & \quad + f(x) \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= f'(x) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} &= g'(x) \text{ であるから,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) \right) \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

となる.

ここで $y = (x+1)^3(x-2)^4$ の微分を考えてみる.

$$\begin{aligned}
y' &= 3(x+1)^2 \cdot (x-2)^4 + (x+1)^3 \cdot 4(x-2)^3 \\
&= (3(x-2) + 4(x+1))(x+1)^2(x-2)^3 \\
&= (7x-2)(x+1)^2(x-2)^3
\end{aligned}$$

のように因数分解された形のままで計算できるため,
 $y' = 0$ となる x の値が計算しやすい.

積の微分

$y = f(x)g(x)$ のとき

$$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

また, $u = f(x)$, $v = g(x)$ と表すと $y = uv$ であるから,

$$(uv)' = u'v + uv'$$

と書くこともある.

問題 4 $y = (x+1)^3(x-2)^4$ の増減表を完成させてグラフをかけ (極値は指数表示でもよい).

問題 5 次の式を微分して $y' = 0$ となる x の値を求めよ.

(1) $y = (x+1)^2(x-1)^2$ (2) $y = (2x-1)^2(x-3)^3$

(3) $y = (x^2-4)^3(x+1)^4$

例 3 $y = x^5$ の微分は $y' = 5x^4$ であるが, $y = x^2 \cdot x^3$ と考えてみる. すると,

$$\begin{aligned}
y' &= (x^2 \cdot x^3)' \\
&= 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 \\
&= 2x^4 + 3x^4 = 5x^4
\end{aligned}$$

となり, ふつうに微分したときと計算が合う.

微分の公式 $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ が成り立つからといって $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$ のような公式が成り立つことはない. 安易に考えず, 積の微分は注意しておこなうこと.

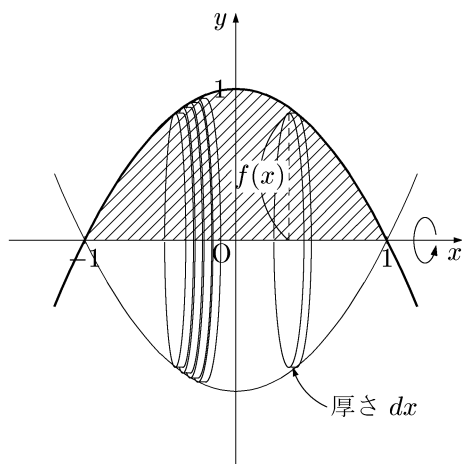
問題 6 $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ であることを示し, $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$ を微分せよ.

1.2 回転体の体積

● x 軸中心の回転体

ある図形を x 軸や y 軸などを中心に回転させてできる立体を**回転体**という。回転体の体積を計算する方法を考えてみよう。

$y = f(x) = 1 - x^2$ と x 軸で囲まれた領域を x 軸に回転させてできる回転体の体積を求める。



この回転体を縦にスライスしていき、半径 $f(x)$ 厚さ dx の薄い円盤の集合体だと考える。各円盤の体積は $\pi\{f(x)\}^2 dx$ である。回転体はこの薄い円盤の $x = -1$ から $x = 1$ までの和になるので、体積を V とおくと

$$V = \int_{-1}^1 \pi\{f(x)\}^2 dx$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \pi\{f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 \{1 - x^2\}^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{16}{15}\pi \end{aligned}$$

と計算できる。

この問題では $y = 1 - x^2$ と x 軸で囲まれた図形を回転させているが、 $y = x^2 - 1$ と x 軸で囲まれた図形を回転させた立体も同じものになる。もし、この図形の「面積を計算せよ」といわれたら、 $y = x^2 - 1$ だと考えている範囲 $-1 \leq x \leq 1$ のとき y の値は負になるため、注意して計算しなければならない。しかし、この問題のように回転体の体積を計算するときは、 $\{f(x)\}^2$ と 2 乗して

いるので、 $y = 1 - x^2$ でも $y = x^2 - 1$ でも、結局同じ答えが出る。

つまり、 $y = f(x)$ のグラフの回転体の体積を考えると $f(x)$ の値の正負は気にしなくてよい。

回転体の体積

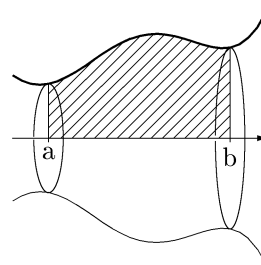
$y = f(x)$ と直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分を x 軸を中心に回転させた回転体の体積を V とおくと、

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

である。

回転体の体積は、**断面積を**

積分して求める。右図では、ある x の値における断面積は $\pi\{f(x)\}^2$ となるが、この断面積を a から b まで積分した形が上の式であることを確認しよう。

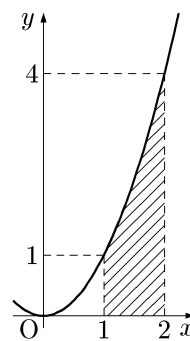


また、式変形の際の π の書き忘れを防ぐために、 $\frac{V}{\pi} = \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$ として積分計算していくこともある。

例題 2 $y = x^2$ と x 軸および直線 $x = 1$, $x = 2$ で囲まれた部分を x 軸を中心として回転させた回転体の体積を求めよ。

解) 体積を V とおくと

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 (x^2)^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_1^2 \\ &= \frac{\pi}{5} (2^5 - 1^5) \\ &= \frac{31}{5}\pi \end{aligned}$$



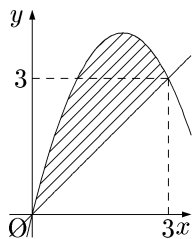
問題 7 曲線 $y = 4 - x^2$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸を中心として回転させた回転体の体積を求めよ。

問題 8 曲線 $y = 9 - x^2$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸を中心として回転させた回転体の体積を求めよ。

例題 3 $y = -x^2 + 4x$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分を x 軸を中心として回転させた回転体の体積を求めよ。

考え方

この図形を回転させた立体は、放物線 $y = -x^2 + 4x$ と x 軸, $x = 0$, $x = 3$ で囲まれた領域を回転させたものから, $y = x$ によって作られる円錐部分を抜いたものに等しい. できあがる立体の形を考えて, 大きく取った部分から不要な部分を引いていけばよい.



解) 体積を V とおくと,

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^3 (-x^2 + 4x)^2 dx - \int_0^3 x^2 dx \\ &= \int_0^3 (x^4 - 8x^3 + 16x^2) dx - \int_0^3 x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + 5x^3 \right]_0^3 \\ &= 3^3 \left(\frac{9}{5} - 2 \cdot 3 + 5 \right) \\ &= \frac{108}{5}\end{aligned}$$

よって, $V = \frac{108}{5}\pi$ ■

別解) x における断面積を S とおくと,

$$S = (-x^2 + 4x)^2 \pi - x^2 \pi \text{ となる.}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^3 \{(-x^2 + 4x)^2 - x^2\} dx \\ &= \frac{108}{5}\end{aligned}$$

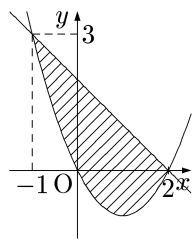
■

問題 9 $y = 6 - x^2$ と直線 $y = 2$ で囲まれた図形を x 軸中心に回転させた回転体の体積を求めよ.

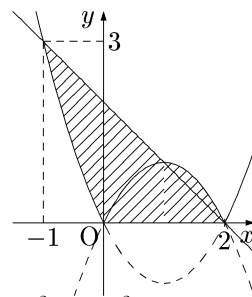
例題 4 $y = x^2 - 2x$ と直線 $y = 2 - x$ で囲まれた部分を x 軸を中心として回転させた回転体の体積を求めよ.

考え方

x 軸中心に回転させて作った立体を x 軸を含む平面で切ると, 必ず x 軸対称になる. 本問の図形は x 軸の上下にまたがっているため, まず x 軸で折り返して「より考えやすい図形で」立体を作ればよい.



解) 考えている図形を x 軸で折り返して, 右のような図形を x 軸中心に回転させた立体の体積を求めればよい. よって, 求める体積を V とおくと



$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_{-1}^1 (2-x)^2 dx + \int_1^2 (-x^2 + 2x)^2 dx \\ &\quad - \int_{-1}^0 (x^2 - 2x)^2 dx \\ &= 2 \int_0^1 (4+x^2) dx + \int_1^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx \\ &\quad - \int_{-1}^0 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx \\ &= 2 \left[4x + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_1^2 \\ &\quad - \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_{-1}^0 \\ &= \left(8 + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} \right) + \left(-\frac{1}{5} - 1 - \frac{4}{3} \right) \\ &= \frac{26}{3} + \frac{30}{5} - 8 \\ &= \frac{20}{3} \\ \text{よって } V &= \frac{20}{3}\pi \quad \blacksquare\end{aligned}$$

問題 10 直線 $y = 2x - 5$ と直線 $y = 4 - x$ および y 軸で囲まれた図形を x 軸中心に回転させた回転体の体積を求めよ.

問題 11 $y = 4 - x$, $y = x - 2$, $y = 2x - 2$ で囲まれた三角形を x 軸の周りに回転させた回転体の体積を求めよ.

● y 軸中心の回転体

$y = f(x)$ と x 軸, $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の体積 V は $V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$ だった. $y = f(x)$ であるから $V = \pi \int_a^b y^2 dx$ と表してもよい. ただし y は x の関数なので, x の式で書き表されるということを忘れてはいけな.

ここで x と y をひっくり返して考えると, $x = g(y)$

と y 軸, $y = a$, $y = b$ で囲まれた部分の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_a^b \{g(y)\}^2 dy$$

と書き表されるはずである. 次の問題を解いてみよう.

例題 5 $y = x^2$ と y 軸および $y = 4$ で囲まれた部分を y 軸を中心として回転させた回転体の体積 V を求めよ.

考え方

断面積を積分すれば体積はでる. この場合の断面は y 軸に垂直な方向に切ったもの考える. すなわち半径 $\sqrt{x}$ の円だから断面積は πx になる.

解) $y = x^2$ より $x = \pm\sqrt{y}$.
 $\sqrt{y} \geq 0$ で考えればよいので体積 V は

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^4 x^2 dy \\ &= \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy \\ &= \int_0^4 y dy = \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^4 = 8 \end{aligned}$$

よって $V = 8\pi$ ■

問題 12 $y = x^2$ と x 軸および直線 $x = 1$, $x = 2$ で囲まれた部分を y 軸を中心として回転させた回転体の体積を求めよ.

● バウムクーヘン型積分

y 軸中心の回転体の体積では, 断面積以外で考える方法がある.

先の例題を使って考えてみよう. $y = x^2$ と y 軸および $y = 4$ で囲まれた部分を y 軸を中心として回転させた回転体について, 円盤を積み上げて作っていくのではなく, y 軸を芯として薄い皮を 1 枚ずつ巻いて作っていくことをイメージする.

皮 1 枚分の面積は, 底面の半径 x のときの高さが $4 - x^2$ である円柱の側面積に等しいので, $2\pi x(4 - x^2)$ となる.

皮は非常に薄いのだが, 円盤のときと同じようにその薄い皮の厚さを dx と考えると, 1 枚の皮の体積は $2\pi x(4 - x^2)dx$ となる. 紙 1 枚分の体積を考えると,

紙を曲げずに机の上に広げたとき, 高さが紙の厚さになることをイメージすれば理解できよう.

よって, この回転体は y 軸を中心にして外側に向かって 1 枚ずつ薄い皮を筒状に巻き付けて作られていったものだと考えられる. よって回転体の体積も, その皮 1 枚 1 枚の体積の総和であるとみなせる. 底面の半径 x がどこからどこまで変化するかを考えると, この例の場合は 0 から 2 までであるから, 体積 V は

$$V = \int_0^2 2\pi x(4 - x^2)dx$$

として計算できるはずである.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (8x - 2x^3)dx \\ &= \pi \left[4x^2 - \frac{1}{2}x^4 \right]_0^2 \\ &= \pi(16 - 8) = 8\pi \end{aligned}$$

となって, 実際に同じ答が得られた.

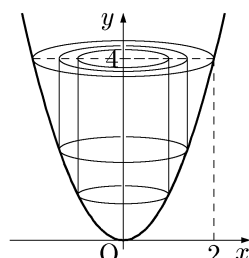
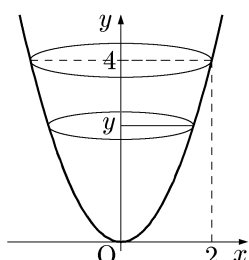
このような積分の考え方を **バウムクーヘン型積分** や **かつらむき型積分** という.

バウムクーヘンとは上から見ると切り株の年輪のような模様が見えるドイツのお菓子で, かつらむきとは大根をくるくる回しながら皮をむくようにして薄く切る切り方のことである. どちらもこの積分の考え方を分かりやすく表現している.

y 軸中心の回転体に限らず x 軸中心の回転体でもバウムクーヘン型積分の考え方が使えて, 場合によっては大変楽に計算できるので, 是非この考え方にも慣れておこう.

問題 13 放物線 $y = x(2 - x)$ と x 軸で囲まれた図形を y 軸中心に回転させた回転体の体積を求めよ.

問題 14 放物線 $y = x^2 - 2x$ と $y = -x^2 + 4x$ で囲まれた図形を y 軸中心に回転させた回転体の体積を求めよ.



第2章

関数と極限

2.1 関数と逆関数

まず関数の定義といくつかの言葉について思い出しておく。

関数の定義

x の値に対して y の値がただ 1 つ定まるとき、 y は x の関数であるという。

また、考える x の変域を**定義域**、それによって求まる y の値の変域を**値域**という。特に定義域について指定がない場合は、定義域は実数全体で考える。数学における関数は、 x から y を計算して求めるものがほとんどで、よく $y = f(x)$, $y = g(x)$ のように表される。

例 1 $y = 3x + 2$, $y = x^2 - 3x + 4$ などの整式は関数。このような関数を**整関数**という。

例 2 $y = \sin(2x - \pi)$, $y = \log_a x$ などの関数。このような三角関数や指数・対数関数は、**解析関数**と呼ばれる。

ここで、関数 $y = f(x) = 3x + 2$ を考えてみよう。グラフをかくときの基本はまず表をかくことであつたから、表もかいてみる。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-4	-1	2	5	8	11	14	17

これはすべて x に値を代入して y がいくらになるかということを計算したのだが、この入力と出力の関係を逆にすることを考えよう。つまり、 y の値を代入した結果 x の値が出力されるような関数を考えてみるわけだ。表の上下を逆にすればよいので

y	-4	-1	2	5	8	11	14	17
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5

となるが、関数は $y = (x \text{ の式})$ と表すことが多いので、 x と y を交換して

x	-4	-1	2	5	8	11	14	17
y	-2	-1	0	1	2	3	4	5

という表が完成する。表を作る過程で x と y を交換しているから、式においても x と y を交換すれば、この表を実現する関数の式が得られるはずである。

そのように考えて、もとの式 $y = 3x + 2$ を $x = \dots$ の形に変形し、最後に x と y の文字を交換すれば、もとの関数と「逆」の関数ができる。実際にそうやって計算した

$$y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$$

が、もとの関数 $y = 3x + 2$ の**逆関数**になる。

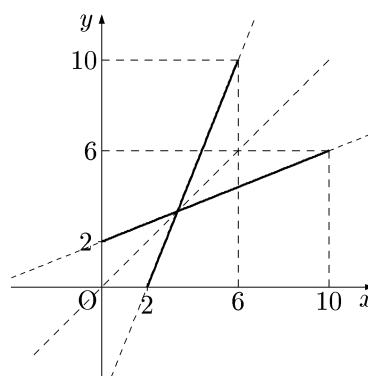
例題 1 $y = \frac{5}{2}(x - 2)$ ($2 < x < 6$) の逆関数とその定義域・値域を求め、グラフを図示せよ。

解 この関数の値域は $0 < y < 10$ より、逆関数の定義域は $0 < x < 10$

$$\text{また、} \frac{2}{5}y = x - 2 \text{ より } x = \frac{2}{5}y + 2$$

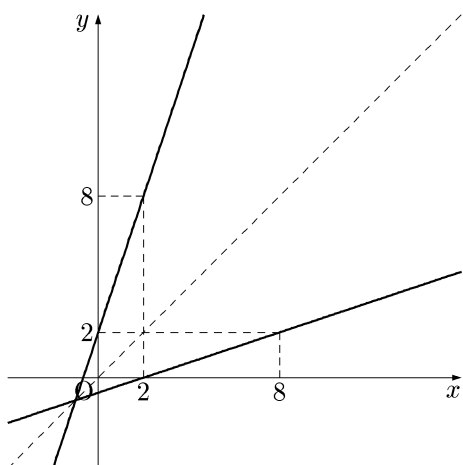
$$x \text{ と } y \text{ を入れ替えて、} y = \frac{2}{5}x + 2$$

値域は $2 < y < 6$



関数 $f(x)$ に対する逆関数は $f^{-1}(x)$ と表されるが、これは $\frac{1}{f(x)}$ という意味ではない。 $\frac{1}{f(x)} = \{f(x)\}^{-1}$ であることに注意してほしい。

$y = 3x + 2$ を例にしてグラフをかいてみると、 $y = 3x + 2$ 上の点 (2, 8) と $y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$ 上の点 (8, 2) が対応していることは作り方からも明らかで、結果として関数のグラフとその逆関数のグラフは、直線 $y = x$ に対して対称になっていることがわかる。

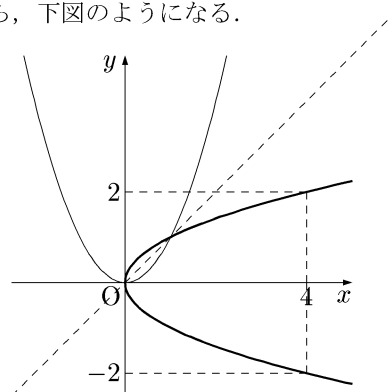


問題 1 $y = f(x) = 5x + 3$ ($-2 < x < 3$) の逆関数と、その定義域と値域を求め、グラフを図示せよ。

問題 2 $y = x^n$ ($0 \leq x$) の逆関数を求めよ。

2.2 無理関数

$y = x^2$ の逆関数を考えてみよう。単純に考えれば、放物線を直線 $y = x$ について対称にひっくり返すのだから、下図のようになる。



ところがこの図だと $x = 4$ のときに $y = 2$ なのか $y = -2$ なのかがはっきりしない。つまり、関数の定義「 x の値に対して y の値がただ 1 つ決まる」に反してしまうことになる。

わかりやすく表で考えてみよう。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9	16

となることから、逆関数を考えると、

x	9	4	1	0	1	4	9	16
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

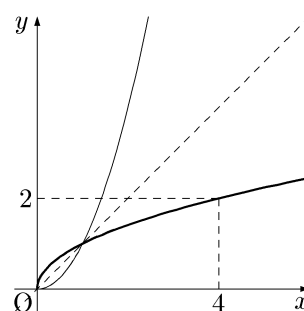
となり、 x を並べ直すと

x	0	1	4	9	16
y	0	± 1	± 2	± 3	± 4

と表される。 $x = 1$ のときの y の値が 1 か -1 か決まらないというのは、「計算して y の値を出す」という関数の感覚からもかけ離れている。

よって、 $y = x^2$ の逆関数は、横に倒れたグラフの上の部分か下の部分、表でいえば正の値か負の値のどちらをとるかをあらかじめ決めて考えればよい。まずグラフの上の部分、すなわち正の値の方で考えよう。

これは、 $y = x^2$ ($x \geq 0$) の逆関数となる。もとの関数の定義域は $x \geq 0$ で値域は $y \geq 0$ である。逆関数は $\pm\sqrt{y} = x$ の x と y を交換して、 $y = \pm\sqrt{x}$ となるが、今考えたように値域が $y \geq 0$ であるから $y =$



$\sqrt{x}$ ($x \geq 0$) と表される。これが、上図の太線部分で表されたグラフを表す関数である。

このように、 $\sqrt{\quad}$ を用いて表される関数を**無理関数**という。

例 3 $y = \sqrt{-x}$

$\sqrt{\quad}$ の中身は 0 以上でなければならないから、定義域は自然に $x \leq 0$ となる。これは、 $y = \sqrt{x}$ の x が $-x$ に置き換わったものだから、 y 軸に関して $y = \sqrt{x}$ と対称なグラフになる。

実際、 $x = -4$ を代入すれば $y = \sqrt{-(-4)} = 2$ となる。

例 4 $y = \sqrt{3x-5}$

$y = \sqrt{3\left(x - \frac{5}{3}\right)}$ である。
よってこのグラフは $y = \sqrt{3x}$ を x 軸の正の方向に $\frac{5}{3}$ 平行移動させたものになる。定義域は根号の中身が 0 以上だから $x \geq \frac{5}{3}$ 。

このグラフでも具体的な値を代入し、どのような点を通るのかよく理解しておくこと。

問題 3 次のグラフを書け

- (1) $y = -\sqrt{-2x}$ (2) $y = \sqrt{4-6x}$
(3) $y = 2\sqrt{x-1}$ (4) $y = 2 - \sqrt{2x+4}$

また、 $y = \sqrt{1-x^2}$ のように根号の中身が 2 次式になるものや、あるいはさらに複雑な形のものもでてくるが、この節では根号の中身が 1 次式となるもののみ扱う。

問題 4 $y = \sqrt{ax+b}$ は $y = \sqrt{ax}$ をどのように平行移動したものか。

ここで話を少し戻そう。

$y = x^2$ のように、異なる x の値が同じ y の値を持つような場合は、定義域全体で逆関数を考えると関数の定義を満たさないことがわかった。だから、 x に対して y がただ 1 つ、逆に y に対しても x がただ 1 つ対応するような部分でしか逆関数を考えることはできない。このような x, y の関係を **1対1** という。

1対1

関数 $y = f(x)$ がある定義域において、必ず

$$a \neq b \iff f(a) \neq f(b)$$

を満たすならば、その定義域において関数 f は **1対1** であるという。

数学小話

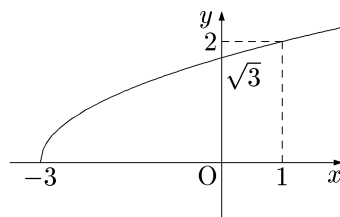
$y = 2^x$ のような指数関数の場合、 x と y は 1 対 1 の関係にあるため、グラフ全体で逆関数を考えることができ、逆関数として $y = \log_2 x$ が新たに定義されることになる。

例題 2 $y = x^2 - 3$ ($x \geq 0$) の逆関数を求めてグラフをかけ。

解) $x \geq 0$ より値域は $y \geq -3$

また、定義域において $y = x^2 - 3$ は 1 対 1 の関係になっている。

$\sqrt{y+3} = \pm x$ となるが、 $x \geq 0$ より $x = \sqrt{y+3}$
 x と y を入れ替えて、 $y = \sqrt{x+3}$ ($x \geq -3$)

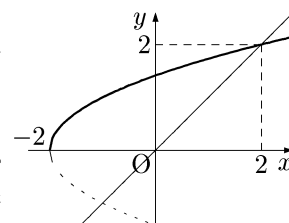


例題 3 $x = \sqrt{x+2}$ を解け。

考え方

両辺ともに $y =$ の形にしてグラフで考えると右図のようになる。

無理関数であるから、横に倒した放物線の上側となるか下側となるかを考慮しなければ、関係のない解 (Ghost ともいう) まで出てくるので注意する必要がある。



解) 右側の定義域より $x \geq -2$

また、右側の値域から $x \geq 0$

両辺を二乗して $x^2 = x + 2$

これを解いて $x = -1, 2$ ところが、 $x \geq 0$ より $x = 2$

グラフをかいて「グラフより」と一言ことわって答えを書いてよい。

例題 4 $x < \sqrt{x+2}$ を解け.

考え方

計算で解いてみる.

両辺を二乗すると $x^2 < x+2$.

このまま解くと $-1 < x < 2$ となるが, これは前図のグラフの位置関係から見るとおかしい. 原因は, 二乗することによって正負の議論が曖昧になったからだ.

正確には, $x \geq 0$ のときは $-1 < x < 2$ と合わせて $0 \leq x < 2$ となり, $x < 0$ のときは左辺が負で右辺が正のため常に成り立つが, 定義域より $x \geq -2$ となる. 以上より $-2 \leq x < 0$ が導き出される.

これらの議論はややこしいため, グラフをかいて「図より」の一言で決着を付けるのがよい. グラフをかくことは解答を作る上で大きな助けになるので, かくことをすすめる.

解) (グラフを書いて) グラフより $-2 \leq x < 2$

問題 5 次の方程式・不等式を解け

(1) $\sqrt{x-1} = x-3$ (2) $\sqrt{x-1} \geq x-3$

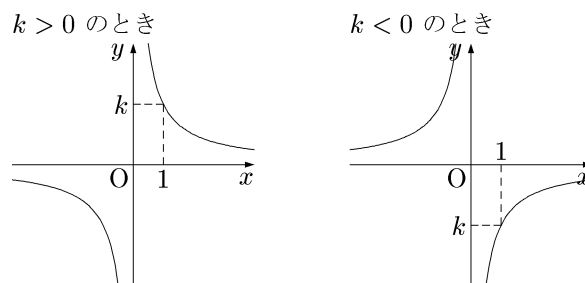
問題 6 $y = \sqrt{2x-4}$ と $y = kx$ がただ 1 つの共有点を持つように定数 k の値を定めよ. また, その共有点の座標を求めよ.

2.3 分数関数と極限

$y = \frac{1}{x}$ や $y = \frac{1}{x^2+1}$ のように**分数式**の形で表される関数を**分数関数**という. 分数式とは $\frac{\text{整式}}{\text{整式}}$ のように 2 次以上の式も扱うが, この節では $\frac{1 \text{ 次式}}{1 \text{ 次式}}$ を中心に扱う.

● 直交双曲線

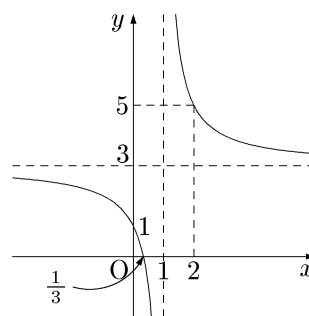
$y = \frac{k}{x}$ のグラフを**直交双曲線**という. このグラフが分数関数の基本となる.



例 5 $y = 3 + \frac{2}{x-1}$ のグラフをかけ.

このグラフは $y = \frac{2}{x}$ を x 軸方向に 1, y 軸方向に 3 平行移動したものである. よって, 下図.

なお切片の値は $x = 0$ もしくは $y = 0$ を代入してすぐに求めることができるので必ず記入すること.



問題 7 次の関数のグラフをかけ.

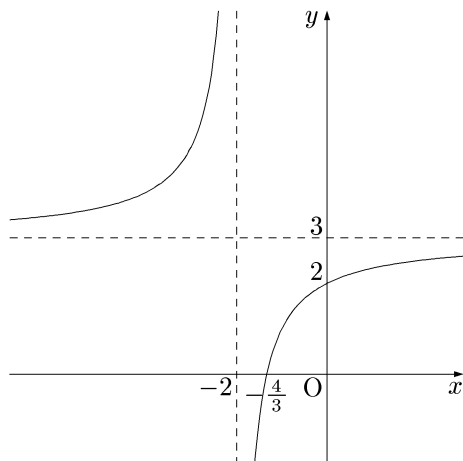
(1) $y = \frac{1}{x-2} - 2$ (2) $y = -\frac{2}{x+3} + 1$

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ のグラフは分母で分子を割ってやることで $y = q + \frac{k}{x-p}$ のグラフに変形できる. $y = \frac{k}{x}$ の直交双曲線を平行移動したものとして考えればグラフをかくことができる.

例題 5 $y = \frac{3x+4}{x+2}$ のグラフをかけ.

解) $y = \frac{3x+4}{x+2} = 3 + \frac{-2}{x+2}$

と表されるから、このグラフは $y = \frac{-2}{x}$ を x 軸方向に -2 , y 軸方向に 3 平行移動したものである。よって、下図。



なお、この例題で直線 $y = 3$, $x = -2$ を点線で描いているが、これはグラフの**漸近線**となっているので省略してはいけない。

問題 8 次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = \frac{2x+5}{x+2}$ (2) $y = \frac{4x}{x-2}$
 (3) $y = \frac{-3x+8}{x-3}$

問題 9 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ は、どのようなグラフをどのように平行移動させたものか。(ヒント：数値によってあらゆる条件を考えること)

例題 6 $\frac{2x+3}{x-1} \geq \frac{1}{2}x$ を解け.

考え方

まずグラフを利用することを考える。次に、2つのグラフの位置関係を把握するために、交点を求めることが必要。

なお、定義域より $x \neq 1$ である。

解) $y = \frac{2x+3}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}$ ($x \neq 1$)

また、 x 切片は $x = -\frac{3}{2}$, y 切片は $y = -3$

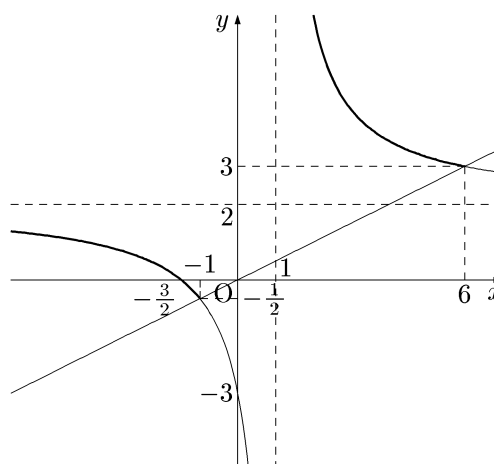
$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{1}{2}x$ を解くと

$2(2x+3) = x(x-1)$ より $x^2 - 5x - 6 = 0$

よって $x = -1, 6$

交点の座標は $(-1, -\frac{1}{2})$, $(6, 3)$

また、グラフは下図。



よって、グラフより $\frac{2x+3}{x-1} \geq \frac{1}{2}x$ を満たす x の範囲は、

$x \leq -1, 1 < x \leq 6$

別解 場合分けで考える。

(i) $x-1 > 0$ のとき $2x+3 \geq \frac{1}{2}x(x-1)$

$x^2 - 5x - 6 \leq 0$ より $-1 \leq x \leq 6$

$x > 1$ より $1 < x \leq 6$

(ii) $x-1 < 0$ のとき $2x+3 \leq \frac{1}{2}x(x-1)$

$x^2 - 5x - 6 \leq 0$ より $x \leq -1, 6 \leq x$

$x < 1$ より $x \leq -1$

以上、(i), (ii) より $x \leq -1, 1 < x \leq 6$

数学小話

不等式を計算によって解くときは、両辺にかける式が正か負かで場合分けをしなければならない。上の別解では $x-1$ を両辺にかけるため、場合分けを考える必要が出てくる。

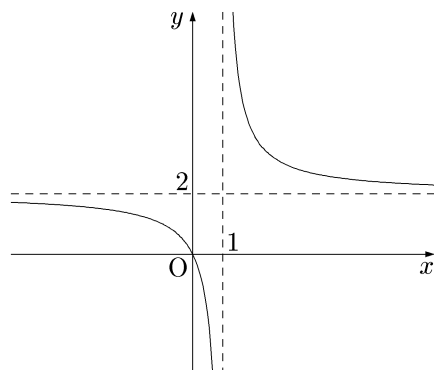
しかし、両辺に $(x-1)^2$ をかけるならば、定義域より $x \neq 1$ であるから常に $(x-1)^2 > 0$ なので不等号は変わらない。よって、

$$(2x+3)(x-1) \geq \frac{1}{2}x(x-1)^2$$

を解けば解が出てくるはずである。

● 分数関数と極限

$y = \frac{2}{x-1} + 2$ のグラフを考える.



直線 $y = 2$ は漸近線である. 実際 x が正の方向に無限に大きくなっていったとき, y はどんどん 2 に近づいていく. しかし, $y = 2$ となることはない.

x がいくらでも大きな値になっていくことを $x \rightarrow \infty$ と表す.

このとき, y が 2 に近づいていくことを同様に $y \rightarrow 2$ と表す. よって,

「 $x \rightarrow \infty$ のとき $y \rightarrow 2$ である」といえる.

これを $x \rightarrow \infty$ のとき y は極限值 2 に**収束する**といい,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 2$$

と表す.

同様に, x が負の方向にいくらでも大きな値になっていくことを $x \rightarrow -\infty$ と表す. このグラフの場合, やはり $x \rightarrow -\infty$ のとき $y \rightarrow 2$ であるから,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$$

とも表せる.

また, x が 1 に近づくと, y は大きな値を取るようになるが, 1 に右から近づくとときと左から近づくとときでは上に行くか下に行くか結果が異なる.

右から近づくと場合を具体的な例でみると, $x = 1.01, 1.001, 1.0001 \dots$ のような値を代入したと考えることができる. つまり x を 1 に右から近づけるということは, $x = 1 + \delta$ ($\delta > 0$) として δ を正のままどんどん 0 に近づけていくということである. これを, 記号では

$$x \rightarrow 1+0$$

と表す.

例えば $\delta = 0.001$ のとき $x = 1.001$ だが,

$y = \frac{2}{1.001-1} + 2 = \frac{2}{0.001} + 2 = 2002$ となることから, x が 1 に右から近づくととき y の値がいくらでも大きな正の数になることがわかる. このことを, y が正の無限大に**発散する**といい

$$y \rightarrow \infty$$

と表す.*1

まとめると,

$x \rightarrow 1+0$ のとき $y \rightarrow \infty$ となるので,

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \infty$$

と表せる.

同様に, 左から 1 に近づけていったときを考えると,

$x \rightarrow 1-0$ のとき $y \rightarrow -\infty$ より,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$$

となる.

∞ は無限に大きくなることを表す記号だが, ∞ という特殊な値だと考えて, 無限大に発散することを「極限が ∞ となる」と表現することもある.

数学小話

極限とは, 実際には「とらない」値を考えたときに用いる考え方である. しかし, 現実的には無理矢理「代入」して何が起きているのかを感覚的に知る方法も有効だ.

上の場合では, $x \rightarrow 1+0$ において

$$y = \frac{2}{x-1} + 2 \text{ の値を考えるとき,}$$

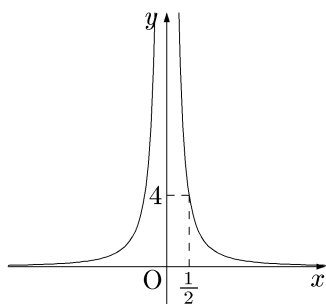
$x = 1+0$ を代入すると

$$y = \frac{2}{(1+0)-1} + 2 = \frac{2}{+0} + 2 \text{ と表せる.}$$

$\frac{2}{+0}$ の符号は + で大きさが無限大になるため, $y = +\infty$ と考えることができる.

$y = \frac{1}{x^2}$ のグラフを考えてみよう. 分母 x^2 は正で, $x \rightarrow 0$ のとき x^2 は正のまま 0 に近づいていく. よって, y は正の大きな数となる.

*1 正であることを強調するなら $y \rightarrow +\infty$ と表してもよい.



グラフからも,

$\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow -0} y = \infty$ である. このように, x が 0 に近づくときの近づき方によらずに y の値が定まるときは $x \rightarrow +0$ でも $x \rightarrow -0$ でも極限值が同じなのだから, まとめて $x \rightarrow 0$ として

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \right)$$

と表してよい.

逆に「 x が 0 に近づくとき y は正の無限大に発散する」のように, 「右から」や「左から」という近づき方に言及していないときは, 「どのような近づき方をしても (どちら側から近づいても) 同じ結果になる」という意味が含まれていることに注意しておくこと.

ここで見た例は関数の極限でもういちどくわしく学ぶ.

2.4 極限と数列

● 数列の極限

$x \rightarrow \infty$ という記号を用いるとき, 実際に頭の中では 1001, 1002, 1003, $\dots$ や 100, 1000, 10000, 10000, $\dots$ のような具体的な数列に置き換えた方が分かり易い. よって, 数列における極限を考えていくことにしよう.

例 6 $\{a_n\} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ は無限に大きくなる数列.

$\{a_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ はいくらでも小さな数 (つまり 0) になる無限数列. 記号で表すと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0^{*2} \text{ となる.}$$

例 7 $a_n = 3$ のとき, $\{a_n\} = \{3, 3, 3, \dots\}$ である. ずっと同じ値をとり続けるので, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ であり, このような場合も $n \rightarrow \infty$ のとき a_n は 3 に収束するという.

例 8 数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ は,

そのまま代入すると $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{\infty}{\infty}$ の形になる.

しかし, 一般項を $a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{n} + 1}$ と書き表

すと, $\frac{1}{n}$ の部分が 0 に収束するから $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ となることがわかる.

ある一定の値に収束しない場合, 必ずしも正の無限大か負の無限大に発散するわけではない. 例えば次のような例を見てみよう.

例 9 数列 $a_n = (-1)^n$ は, $n \rightarrow \infty$ のとき

$\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ と, 交互に同じ値を繰り返す無限数列である. よって, n をいくら大きな値にしてもある一定の値に近づいていかないので, この数列は収束しない. このような場合も**発散する**というが, より正確には**振動する**という.

例 10 数列 $\{(-2)^n\}$ は, 絶対値が無限大に発散するが, 正負を交互に取ることから正の無限大もしくは負の無限大に発散するわけではないので「振動する」という.

なお, 負の無限大に発散するようなときを「無限に小さくなる」と表現すると, 0 へいくときと混同しやすい.

*2 より正確には $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = +0$ である.

そのため**負の方向に無限に大きくなる**という表現を用いること。

無限数列が $n \rightarrow \infty$ のときにどのようなようになるかを分類すると次のようになる。

収束の分類

収束する

発散する

- 正の無限大 $(+\infty)$ に発散する
- 負の無限大 $(-\infty)$ に発散する
- 振動する

特に、収束していないとき**発散する**という。

また、極限値の表し方は次のようになる。

極限値の分類

- 収束するとき…
極限値はある特定の値 (0 や 1, $\sqrt{2}$ など)
- ∞ に発散するとき… 極限値は ∞
- $-\infty$ に発散するとき… 極限値は $-\infty$
- 振動するとき… 極限値は **ない**

問題 10 次の式で一般項が与えられる数列の収束、発散を調べよ。(収束するときは極限値も求める。)

- (1) n^2 (2) $7 - 3n$ (3) $(-5)^n$
- (4) $\frac{1}{(-3)^n}$ (5) $\left(-\frac{1}{5}\right)^n$ (6) $2n - \frac{1}{\sqrt{n}}$
- (7) $\frac{3}{n} + 4$ (8) $5 - \frac{1}{n^2}$ (9) $\frac{2n+3}{n+1}$

● 極限の計算

数列が収束する場合、次の性質が成り立つ。

極限値の性質

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束し、

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ のとき

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \alpha$ (k は定数)
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ (複号同順)
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (ただし $\beta \neq 0$)

これらの式が成り立つのは収束するときだけで、どちらか一方でも振動・発散する場合には適用できない。一

見正しそうでも実際には成り立たないこともあるので、よく吟味しなければならない。

例題 7 次の極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 4n + 3} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n^2 - 5}$$

考え方

そのまま代入すると $\frac{\infty}{\infty}$ という形になってしまうため、うまく変形する必要がある。

解 分子分母の最高次数をみて、 n^2 や n^3 で分子分母を割ればよい。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 4n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n^2 - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n}}{1 - \frac{5}{n^2}} = 0 \quad \blacksquare$$

問題 11 次の極限を計算せよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 3}{4n + 3} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n^3}{2n^2 + n^5}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^2}{1 + n^2}$$

● 直感的な極限の計算と不定形

ここでは、収束しない場合の数列でも成り立つ法則や、**不定形**と呼ばれる形の極限について考えてみる。

例 11 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 6n^2)$ を求めよ。

直接代入すると $\infty - \infty$ の形であるが、答は 0 とは限らない。 ∞ は無限に大きい正の数という記号で、定数ではないからだ。実際、 $n^3 - 6n^2 = n^3 \left(1 - \frac{6}{n}\right)$ であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{n}\right) = 1 \text{ であるから,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 6n^2) = \infty \text{ となる.}$$

また、 $n^3 - 6n^2 = n^2(n - 6)$ と変形すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} (n - 6) = \infty \text{ であるから,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 6n^2) = \infty \text{ と考えることもできる.}$$

この例では、 $\infty \times 1 = \infty$ や $\infty \times \infty = \infty$ という式が「当たり前になり立つ」として計算されている。実際、これらの式は少し考えてみれば当たり前であろう。このように直観的に計算が明らかな場合はそのまま計算しても問題ないが、元々の $\infty - \infty$ という形では答がどうなる

のかよくわからない。実際、次のような例を考えることが出来る。

例 12 $n - n^2$, $2n - 2n$, $(n + 3) - n$ の極限は、全て $\infty - \infty$ の形になるが、それぞれの極限值は $-\infty$, 0 , 3 である。よって、 $\infty - \infty$ という形の極限は色々な場合があることになる。

次に $\frac{\infty}{\infty}$ という形になる数列の極限を考えてみよう。

例 13 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^5}$, および $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{n^3}$ を考える。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty.$$

この例では $n \rightarrow \infty$ のとき、直接代入するといずれも $\frac{\infty}{\infty}$ という形になるが、約分して 1 ということはない。記号では同じ ∞ であっても、分母と分子のどちらが無限に大きくなりやすいのかが異なるため、違う結果になる。実際、 $n \rightarrow \infty$ のとき n^3 と n^5 では n^5 の方が先に大きくなっていく*3ので、上のような結果になる。

例 14 $\frac{4n^2}{n^2}$, $\frac{3.14n}{n-1}$, $\frac{n^3+1}{100n^3}$ の極限は、全て $\frac{\infty}{\infty}$ の形になるが、それぞれ 4 , 3.14 , $\frac{1}{100}$ に収束する。

$\infty - \infty$ や $\frac{\infty}{\infty}$ のように、実際の極限值が ∞ や 0 , あるいは一定の値など、様々な結果になる可能性があるとき、この形のことを**不定形**という。実際、上の例を利用すれば好きな値（任意の値）を極限值にもつような数列を作る。

問題 12 $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{\infty}{\infty}$ の形になる数列で、極限值が 5 になるものを 3 種類作れ。

例題 8 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 4} - n)$ を求めよ。

考え方

直接代入すると $\infty - \infty$ と不定形であることがわかる。そのため、うまく変形する必要がある。

解) 分子分母に $\sqrt{n^2 + 3n + 4} + n$ をかける。

$$\begin{aligned} & \sqrt{n^2 + 3n + 4} - n \\ &= \frac{(\sqrt{n^2 + 3n + 4} - n)(\sqrt{n^2 + 3n + 4} + n)}{\sqrt{n^2 + 3n + 4} + n} \\ &= \frac{(n^2 + 3n + 4) - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n + 4} + n} \\ &= \frac{3n + 4}{\sqrt{n^2 + 3n + 4} + n} \\ &= \frac{3 + \frac{4}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}} + 1} \end{aligned}$$

以上より

$$(\text{与式}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}} + 1} = \frac{3}{2}$$

この問題のような解き方を**分子を有理化する**ということがある。

問題 13 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3n + 6} - 2n)$ を求めよ。

数学小話

本問の場合、 $\sqrt{n^2 + 3n + 4} = \sqrt{(n + \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}}$ と変形できる。 $n \rightarrow \infty$ のとき $n + \frac{3}{2}$ は $\frac{7}{4}$ に比べて相当大きくなるため、 $\sqrt{n^2 + 3n + 4} \div n + \frac{3}{2}$ と考えることができれば、極限值が $\frac{3}{2}$ になることが理解できる。

問題 14 次の式がどのような極限になりうるか考え、複数の場合があるときはその全てを、任意の結果になりうるときは不定形と答えよ。

- | | | |
|-------------------------|----------------------------|------------------------|
| (1) $\infty + \infty$ | (2) $\infty \times \infty$ | (3) $0 \times \infty$ |
| (4) 0×0 | (5) $\infty - \infty$ | (6) $1 - \infty$ |
| (7) $\frac{0}{\infty}$ | (8) $\frac{\infty}{0}$ | (9) $\frac{1}{\infty}$ |
| (10) $\frac{\infty}{2}$ | (11) $\frac{0}{0}$ | (12) $\frac{5}{0}$ |

*3 n^3 と n^5 では n^5 の方が**オーダーが強い**などということもある。

数学小話

$\frac{1}{0}$ のような書き方はしばしば誤りを生じることがある。単純に考えれば 1 をごく小さい数で割っているのだから ∞ であるのだが、前節で考察したように 0 への近づき方には $+0$, -0 の 2 通りがあるため、 $\frac{1}{0}$ が $\frac{1}{+0}$ なのか $\frac{1}{-0}$ なのかで、答が $+\infty$ か $-\infty$ かに分かれてしまう。

実際、極限が $\frac{1}{0}$ の形になる例には

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-\frac{1}{n}} = -\infty$ の他に、 ∞ と $-\infty$ の間で振動する

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(-1)^n \frac{1}{n}}$ のようなものもある。

0 には $+0$, -0 の 2 つの意味があることに気を付けておくのがよい。

不定形

極限の不定形には

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty \cdot 0, \infty - \infty$$

がある。

他の形の不定形も存在するが、ここまでの学習で現れる不定形はこれだけである。受験数学ではあと指数の形をした不定形を学ぶ。(38 p.38)

● 極限値の大小関係

数列の極限値の大小関係では次の関係が成り立つ。

極限値の大小関係

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とすると、 $a_n \leq b_n$ のとき、 $\alpha \leq \beta$ となる。

特に、 $a_n < b_n$ のとき、 $\alpha \leq \beta$ となる。

2. $a_n \leq c_n \leq b_n$ のとき、 a_n , b_n がともに同じ値 α に収束する、すなわち

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ となるならば $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ である。

2. は、はさみうちの原理とよばれ、直接極限を求めるのが難しい問題のときによく用いられる。

また、1. において等号が成り立たないのに $n \rightarrow \infty$ の極限で等しくなってしまうという例を挙げておく。

例 15 $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ のとき、常に $a_n < b_n$ であるが、 $n \rightarrow \infty$ のときに a_n も b_n も 1 に収束する。つまり、 n が自然数のとき $a_n < b_n$ だが $n \rightarrow \infty$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ と等号が成り立つ。

例題 9 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n\theta}{n^2}$ を求めよ。ただし、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ とする。

考え方

$\theta = \frac{\pi}{3}$ であり、 $\cos$ は 2π ごとに同じ値を取るのだから…と考えてもよいが、 $\cos$ が ± 1 の間の値しか取らないことに気が付けばはさみうちの原理を用いてより簡単に解くことができる。

解) $-1 \leq \cos n\theta \leq 1$ であるから、

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos n\theta}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \text{ となる。よって、}$$

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n\theta}{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\text{ここで } -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \text{ より、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n\theta}{n^2} = 0$$

問題 15 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{5}$ を求めよ。

● 無限等比数列

$\{2^n\}$ や $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ などの等比数列の収束の有無や極限値については直感的に明らかである。まずここでは $a_n = r^n$ の形で与えられる等比数列の $n \rightarrow \infty$ における挙動を詳しく考える。

具体例を考えてみると次が成り立つことは明らか。

等比数列の収束

1. $1 < r$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$

2. $r = 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$

3. $-1 < r < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$
($|r| < 1$ のとき、とも表せる)

4. $r = -1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ は (± 1) で振動する。

5. $r < -1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ は $(\pm \infty)$ で振動する。

以上より $-1 < r \leq 1$ のときのみ r^n は収束して極限値を持つ。

では、それぞれ証明してみよう。

1. $1 < r$ より $r = 1 + h$ とおける. ($h > 0$)

2 項定理より,

$$(1+h)^n = 1^n + {}_nC_1 1^{n-1} h^1 + {}_nC_2 1^{n-2} h^2 + \cdots + h^n \\ > 1 + nh$$

また, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+nh) = \infty$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+h)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$$

2. 明らか.

3. $r = 0$ のときは明らか. また, $r \neq 0$ のとき $r' = \frac{1}{|r|}$

を考えると, $r' > 1$ であるから 1. より $\lim_{n \rightarrow \infty} r'^n = \infty$ となる.

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |r|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r'^n} = 0$ で,
 $-|r^n| \leq r^n \leq |r^n|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

4. 明らか.

5. 1. より $|r^n|$ は $+\infty$ に発散することがわかるが, 符号が $+$, $-$ 交互に入れ替わるため振動する.

問題 16 次の式で一般項が与えられる等比数列の収束, 発散を調べよ.

(1) $\left(-\frac{3}{5}\right)^n$ (2) $\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^n$ (3) $3(-2)^n$

例題 10 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} - 3^n}{3^{n+1} - 2^n}$ の値を求めよ.

考え方

分母分子を底が大きい数の累乗で割る. (この場合は 3 の n 乗)

解) 3^n で分母分子を割ると,

$$\frac{2^{n+2} - 3^n}{3^{n+1} - 2^n} = \frac{4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

ここで, $n \rightarrow \infty$ のとき $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} - 3^n}{3^{n+1} - 2^n} = \frac{4 \cdot 0 - 1}{3 - 0} = -\frac{1}{3}$$

2^n で割るとどうなるかも実際に試しておこう.

問題 17 次の極限值を求めよ.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{5^n}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} - 5^{n+1}}{4^{n+1} - 5^n}$
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + 2^n}{(-3)^{n+1} - 2^{n+1}}$

例題 11 $a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

の値を求めよ.

解) 特性方程式を解くと $\alpha = \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}$ より $\alpha = 1$

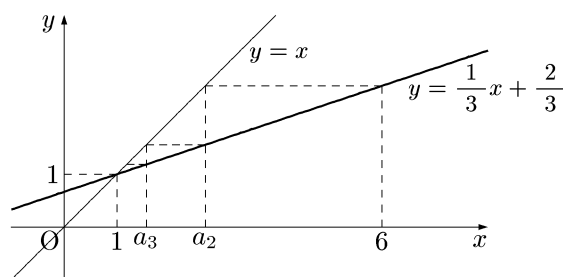
よって, $a_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}(a_n - 1)$

数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $6 - 1 = 5$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比

数列であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 0$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ■

漸化式は, a_n の値を代入して a_{n+1} が求まるようにできている. これを関数の形と捉えると, この例題の問題は $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ のグラフを使って考えることができる.



この図を見れば, $a_1 = 6$ からスタートして 1 へと収束していく様子がよくわかる.

また, a_n がある極限值 α へ収束するならば a_{n+1} も当然 α に収束するので, 漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}$ に代入すると $\alpha = \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}$ となる. これは, 特性方程式と同じ形になっている.

問題 18 $a_1 = 12, 4a_{n+1} = 3a_n + 5$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の値を求めよ.

2.5 無限級数

● 無限級数

ある数列 $\{a_n\}$ にたいして

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

のように無限に先まで足していったものを**無限級数**という。この無限級数は、 $\sum$ を用いて $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と表す。

また、初項から第 n 項までの和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ を無限級数の**部分和**といい、部分和を用いると無限級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

と表せる。

よって、無限級数とは数列 $\{S_n\}$ の $n \rightarrow \infty$ における極限と考えることができる。数列 $\{S_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき収束して、その極限値が S となるとき、無限級数は S に収束するといい、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

と表す。

また、部分和が収束しないとき、この無限級数は発散するという。

例 16 無限級数 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$ を考える。

この無限級数の第 n 項までの部分

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ であるから,}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ となる.}$$

よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \text{ となるから, こ}$$

の無限級数は収束して 1 を極限値にもつ。

$$\text{よって, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \text{ となる.}$$

例 17 無限級数 $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$ は、 n 項目までの部分 S_n が $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ であるから、 $n \rightarrow \infty$ のとき ∞ に発散する。

例題 12 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ の収束・発散について調べよ。

$$\text{解) } \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \\ = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

よって、部分 $S_n = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$
 $n \rightarrow \infty$ のとき部分 S_n は ∞ に発散するので、この無限級数は発散する。 ■

問題 19 次の無限級数の収束・発散について調べよ。

$$(1) \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \cdots$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n} + n}$$

問題 20 次の無限級数の和を求めよ。【06・信州大】

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} + \cdots$$

無限級数 $a_1 + a_2 + \cdots$ を考えるとき、もし a_n が 0 に収束しなければどうなるだろうか。仮に a_n が 0 でないある値（例えば 2）に収束してしまうとしたら n が十分大きくなったとき、無限級数はその値をどんどん足していったものになると考えられるため、発散してしまうだろう。 a_n が振動する場合も、無限級数の和がある値に近づいていくということはない。実は次の命題が成り立つことが知られている。

無限級数の収束条件

数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないならば無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散する.}$$

この対偶を考えて、

$$\text{無限級数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束するならば } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ である.}$$

つまり、無限級数が収束するための必要条件として $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ がある。

例 18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ は $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ より収束しない。

問題 21 次の無限級数の収束・発散について調べよ。

$$(1) -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \cdots$$

$$(2) \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} + \cdots$$

数学小話

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ は無限級数が収束するための必要条件であって、十分条件でないため、たとえ a_n が 0 に収束したとしてもその無限級数が収束するとは限らない。最も有名な例は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ で、これは ∞ に発散する。実際、

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots \\ & > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots \\ & = 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \cdots \end{aligned}$$

となり $\frac{1}{2}$ を無限に足していくため ∞ に発散することがわかる。

● 無限等比級数

等比数列の項を無限に足していったものが**無限等比級数**である。等比数列の初項を a ($a \neq 0$)、公比を r とおくと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

と表される。

この無限等比級数の部分和 S_n は初項から第 n 項までの和であるから、

$$S_n = \sum_{k=1}^n ar^{k-1} = \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1 \text{ のとき}) \\ na & (r = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表される。等比数列 r^n の収束は、 r が 1 より大きいかどうかで判断できたので、前節でやったことを思い出せば、

1. $-1 < r < 1$ のとき

$n \rightarrow \infty$ のとき $r^n \rightarrow 0$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

2. $r = 1$ のとき

$S_n = na$ で $a \neq 0$ であるから $n \rightarrow \infty$ のとき S_n は発散する。

3. $r = -1$ のとき

$a_n = a \cdot (-1)^{n-1}$ より $\{a_n\} = \{a, -a, a, -a, \dots\}$ である。

$S_n = a - a + a - a + \cdots + a \cdot (-1)^{n-1}$ であるから S_n は 0 と a の値を交互に取っていくので一定の値に収束しない。つまり、振動する。

4. $r < -1, 1 < r$ のとき

$n \rightarrow \infty$ のとき $|r^n|$ の値は無限に大きくなる。

すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \infty$ となるので、 S_n は発散する。

もっと厳密にいうと、 $r < -1$ のときは正負の値を交互に取りながら無限に大きくなるので、振動している。ただ、振動するときも発散するというので、このような表現でよい。(p.16)

以上をまとめると

無限等比級数の収束

無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は

1. $|r| < 1$ のとき収束して極限值 $\frac{a}{1-r}$ をとる。
2. $|r| \geq 1$ のとき発散する。

例題 13 次の無限等比級数の収束、発散を調べよ。

- (1) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$
- (2) $1 - 3 + 9 - 27 + \cdots$

解) (1) 初項 2, 公比 $r = \frac{1}{2}$ の無限等比級数である。 $|r| < 1$ よりこの無限等比級数は収束し、その和 S は $S = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$ である。

(2) 初項 1, 公比 $r = -3$ の無限等比級数である。 $|r| > 1$ よりこの無限等比級数は発散する。 ■

問題 22 次の無限等比級数の収束、発散を調べよ。

- (1) $8 - 4 + 2 - 1 + \cdots$
- (2) $3 - 3 + 3 - 3 + \cdots$
- (3) $27 + 18 + 12 + 8 + \cdots$
- (4) $1 + 5 + 25 + \cdots$

● 循環小数

有理数を小数で表したとき、有限小数か循環小数となることは数学 I で学んだが、無限等比級数の考え方を利用すれば循環小数を分数の形で表すことができる。数学 I で学んだ方法と合わせて理解しておくといよい。

例 19 $0.\dot{1}8 = 0.18181818\cdots$ を分数で表す。

$0.\dot{1}8 = 0.18 + 0.0018 + 0.000018 + \cdots$ より $0.\dot{1}8$ は初項 $a = 0.18$, 公比 $r = 0.01$ の無限等比級数である。

$|r| < 1$ よりこの級数は収束し、和 S は

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{0.18}{1-0.01} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$$

となる。以上より、 $0.\dot{1}\dot{8} = \frac{2}{11}$ である。

問題 23 次の循環小数を分数で表せ。

- (1) $0.\dot{4}$ (2) $1.0\dot{6}\dot{3}$ (3) $0.\dot{3}8461\dot{5}$

数学小話

等式 $0.9999\cdots = 1$ が成り立つといわれてしっくりこない人も多いだろう。

$$0.\dot{9} = 0.9 + 0.09 + \cdots = \frac{0.9}{1-0.1} = 1$$

であるし、実際 $0.kkk\cdots$ と同じ数が続くときは $\frac{k}{9}$ と書けるのだから $0.\dot{9} = \frac{9}{9} = 1$ でもある。直感的に納得できる人と納得できない人と大きく分かれるだろうが、数学で「無限」を考えると普通感覚では気持ちの悪いことがよくある。

解) 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n}$ は、それぞれ

初項が $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, 公比が $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ であるから、いずれも収束する。

よって、与式も収束してその和 S は

$$S = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = 2$$

問題 24 次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{6^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 5^n}{10^n}$

● 無限級数の応用

無限級数は、部分和の数列の極限と考えることができる。

すなわち、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおくと、

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ と表される。そこで、無

限級数を数列の極限と考えると、数列の極限の性質から次が成り立つ。

無限級数の性質

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束し、それぞれ α , β を極限值に持つとき、

1. $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k \alpha$ ただし α は定数

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ (複号同順)

例題 14 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^n} + \frac{4}{5^n} \right)$ の和を求めよ。

2.6 関数の極限

● 関数の極限と計算

数列の極限では常に $n \rightarrow \infty$ のときを考えるが、関数の極限では変数 x をどの値に近づけるかいろいろな場合がある。つまり、 $x \rightarrow 0$ や $x \rightarrow 1$, $x \rightarrow -\infty$ などである。

関数 $f(x)$ の $x \rightarrow a$ における極限を $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ とおく。このとき $f(x)$ がある値 α にいくらでも近づくならば、「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は α に収束する」といい、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

と表す。

ここで $x \rightarrow a$ は「 x が a 以外の値を取りながら a に近づく」という意味である。具体的には $a + \frac{1}{n}$ や $a - \frac{1}{n}$ のような数列であると考えればよいが、 x を a に近づけていく方法は何通りもある。

数列の極限と同様に関数の極限についても次の性質が成り立つ。

関数の極限値の性質

$x \rightarrow a$ のとき関数 $f(x)$, $g(x)$ が収束し、
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ となるならば

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \alpha$ (k は定数)
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = \alpha \pm \beta$ (複号同順)
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \alpha \beta$
- (4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ (ただし $\beta \neq 0$)

例 20 関数 $y = x + 5$ では $x \rightarrow 1$ のとき y は 6 に近づく。よって、 $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 5) = 6$

例 21 関数 $y = 2 + \frac{1}{x}$ では $x \rightarrow \infty$ のとき y は 2 に近づく。よって、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$ 。

$x \rightarrow a$ は $x = a$ ということではないので、 a が関数の定義域に含まれないときでも極限を考えることはできる。

$f(x) = \frac{(x-1)x}{x-1}$ という関数を考えると、実際には割り算できてしまうが、このような形で表される場合は分母が 0 となるところは定義域に入らない。よって、この関数の定義域は $x \neq 1$ となるため、直線から点 $(1, 1)$

のところだけ抜いたグラフになる。

仮にこの形のまま $x = 1$ を代入すると $f(1) = \frac{0}{0}$ という不定形の形になってしまうが、極限を計算すると考えれば

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$$

より極限値は 1 となる。極限を

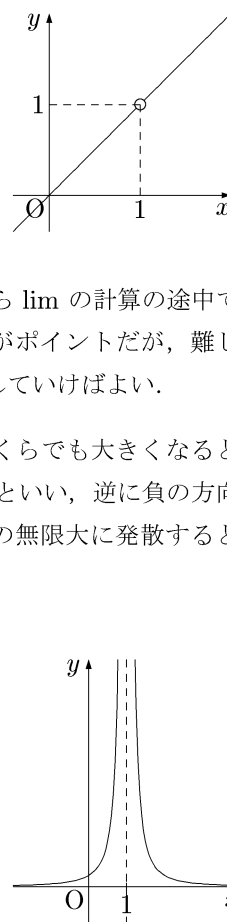
考えるときの計算では $x \neq 1$ だから $\lim$ の計算の途中では「割ってもいい」というところがポイントだが、難しく考えずにとにかくどんどん変形していけばよい。

$x \rightarrow a$ のときに $f(x)$ の値がいくらでも大きくなるとき、 $f(x)$ は正の無限大に**発散する**といい、逆に負の方向にいくらでも大きくなるときは負の無限大に発散するというのであった。(p.14)

例 22 関数 $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ では $x \rightarrow 1$ のとき y は ∞ に発散する。

$$\text{よって、} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty.$$

右図をみれば明らかだが x を 1 に近づけると、右から近づいても左から近づいても結果は ∞ となる。近づき方に依らずに結果が決まるので、 $x \rightarrow 1$ のとき y は ∞ に発散するといえる。



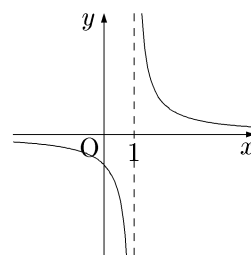
問題 25 次の関数の極限を求めよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{4+x}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x-1}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(3 - \frac{1}{(x-3)^2}\right)$
- (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+x^3}{3x^3}$
- (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}$

$x \rightarrow a$ のとき、近づき方次第で結果が変わることがある。例えば $f(x) = \frac{1}{x-1}$ を考えると、 x が 1 に右から近づくときは ∞ だが、左から近づくときは $-\infty$ となる。 x を右から近づけることを $x \rightarrow 1+0$ と表し、そのときの極限を**右からの極限**という。同様に、 x を左から近づけることを $x \rightarrow 1-0$ とあらわし、そのときの極限を**左からの極限**という。(p.14)

近づき方が異なるときに結果が異なる場合は、収束するとはいえない。この例の場合、右からの極限は

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty, \text{ 左からの極限は } \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$$



のように表せるが、極限值 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ は存在しないということになる。

例 23 $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ($x \neq 0$) のとき

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \quad \text{であるから,}$$

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1$ となる。よって、極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在しない。

x が a という値をとらずに a に近づくとき、すなわち $x \rightarrow a$ のときの関数の収束について分類すると次のようになる。

収束の分類

- x がどのように a に近づいてもかならず同じ特定の値に近づいていくとき収束する。つまり、少なくとも右側からでも左側からでも同じ値に近づかなければならない。
- いくらでも大きくなるとき ∞ に発散する。
- 負の方向にいくらでも大きくなるとき $-\infty$ に発散する。
- 上のいずれでもないときは、単に**収束しない**といえよ。 (振動する場合もあるのでもそのときはそう答えればよい)

また、関数の極限における極限值についてまとめると次のようになる。

極限値の分類

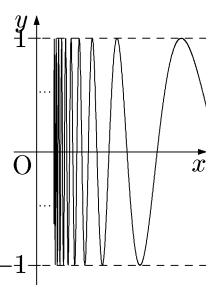
- 収束するとき…
極限値はある特定の値 (0 や 1, $\sqrt{2}$ など)
- ∞ に発散するとき… 極限値は ∞
- $-\infty$ に発散するとき… 極限値は $-\infty$
- 上のいずれでもないとき… 極限値は**ない**

問題 26 次の関数の極限を求めよ。

- | | |
|--|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x+1}$ | (2) $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x+1}$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2-4}{ x-2 }$ | (4) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2-4}{ x-2 }$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \tan x$ | (6) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} \tan x$ |

数学小話

関数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ の $x \rightarrow +0$ のときの挙動を考えてみる。このとき $\frac{1}{x}$ はいくらでも大きな値になるため、0 に近づくにつれて正弦曲線ははげしく振動することになる。+0 への近づき方を考えると、極大値ばかりをとるようにしていけば極限値は 1 になるし、極小値ばかりを取るようにすれば極限値は -1 となる。このように、近づき方次第で $-1 \leq x \leq 1$ のどの値にも収束するようにできてしまうため、 $x \rightarrow +0$ のときの極限値は存在しないといえる。また、単純に考えれば $x \rightarrow +0$ のとき振動するので極限値がない、といえる。実際このグラフは $y = \sin x$ の $x \rightarrow -\infty$ の挙動を凝縮して表したものと考えられる。なお上のグラフでは y 軸に近い部分のグラフを省略している。



例題 15 $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$ を求めよ。

解) 分子の有理化をする。

$$\begin{aligned} & x(\sqrt{x^2+1} - x) \\ &= \frac{x(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} \end{aligned}$$

であるから

$$(\text{与式}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

例題 16 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} + x)$ を求めよ。

考え方

$x = -\infty$ を代入すると $\infty - \infty$ となり、まさに不定形である。 x が負の無限大にいくときは考えづらいので、変数を別の文字に置き換えるのがよい。

解) $x = -t$ とおくと $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$.

よって,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \{ \sqrt{(-t)^2 + (-t) - 1} + (-t) \} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - t - 1} - t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{t^2 - t - 1} - t}{1} \\ &= \frac{(\sqrt{t^2 - t - 1} - t)(\sqrt{t^2 - t - 1} + t)}{\sqrt{t^2 - t - 1} + t} \\ &= \frac{-t}{\sqrt{t^2 - t - 1} + t} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} + 1} \end{aligned}$$

ゆえに

$$(\text{与式}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

■

問題 27 次の極限を求めよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{\sqrt{x^4 + x^3}}{x} \right)$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x)$
- (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} + x}$

例題 17 次の等式が成り立つように定数 a, b の値を定めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax + 5} - b}{x^2 - 1} = \frac{1}{3}$$

考え方

必要条件から考える.

つまり, 分母が 0 へ収束していくので, もし分子が 1 や 2 などの値になってしまうと全体の極限値は無限大に発散してしまう. だから, 少なくとも分子も 0 にならなくてはならない.

これ以降の計算は, どんなに難しそうな形になっても必ず因数分解できて極限値が計算できるようになっているので, あきらめずに変形していけば必ず解ける.

解) $x \rightarrow 1$ のときに (分母) $\rightarrow 0$ であるから, 極限値が存在するためには (分子) $\rightarrow 0$ でなければならない.

よって, $\sqrt{a \cdot 1 + 5} - b = 0$

$b = \sqrt{a + 5}$ より $b \geq 0$. $a = b^2 - 5$ を代入して,

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{(b^2 - 5)x + 5} - b}{x^2 - 1} \\ &= \frac{\sqrt{(b^2 - 5)x + 5} - b}{x^2 - 1} \cdot \frac{\sqrt{(b^2 - 5)x + 5} + b}{\sqrt{(b^2 - 5)x + 5} + b} \\ &= \frac{(b^2 - 5)x + 5 - b^2}{(x + 1)(x - 1)(\sqrt{(b^2 - 5)x + 5} + b)} \\ &= \frac{(b^2 - 5)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)(\sqrt{(b^2 - 5)x + 5} + b)} \\ &= \frac{b^2 - 5}{(x + 1)(\sqrt{(b^2 - 5)x + 5} + b)} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax + 5} - b}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{b^2 - 5}{(x + 1)(\sqrt{(b^2 - 5)x + 5} + b)} \\ &= \frac{b^2 - 5}{4b} \quad (\because b > 0) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{b^2 - 5}{4b} = \frac{1}{3} \text{ より } 3b^2 - 4b - 15 = 0$$

$$(3b + 5)(b - 3) = 0 \text{ より } b = 3 \quad (\because b > 0)$$

よって, $a = 4, b = 3$

また逆に $a = 4, b = 3$ のとき, 与式は成立する.

よって $a = 4, b = 3$. ■

本問では, 解答の始めで必要条件による絞り込みをしているため, 最後に十分条件の確認をしておかなければならない.

問題 28 次の等式が成り立つように定数 a, b の値を定めよ.

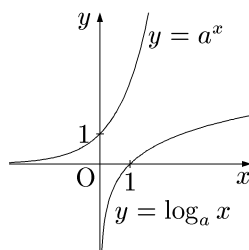
- (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + ax + b}{x - 2} = 5$
- (2) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{ax^2 + b} - 2}{x + 3} = 3$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + a} + b}{x^2 - 1} = 1$

● 指数・対数関数と極限

底を a としたときの指数関数や対数関数の極限については、次のようなことがいえる。

(i) $1 < a$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} a^x &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= 0 \text{ (正確には } +0) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x &= -\infty\end{aligned}$$

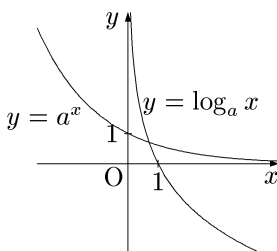


特に対数関数は $x \rightarrow \infty$ のときになかなかすぐには増えてい

かないけれども、極限は ∞ になる。指数関数のグラフを $y = x$ に関して対称移動させたものが対数関数のグラフであることを思い出せばわかりやすい。

(ii) $0 < a < 1$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} a^x &= 0 \text{ (正確には } +0) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x &= \infty\end{aligned}$$



問題 29 次の極限を求めよ。

- | | |
|---|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{-x}$ | (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} 5^{\frac{1}{x}}$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2(x+1)$ | (4) $\lim_{x \rightarrow +0} \log_2(x+1)$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_2 \sqrt{2-x}$ | (6) $\lim_{x \rightarrow +0} \log \frac{1}{2} x(x+1)$ |
| (7) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \log \frac{1}{2} \frac{x+2}{x-1}$ | (8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{1}{x^2}$ |

問題 30 $y = \log_2 |x|$ のグラフをかいて $\lim_{x \rightarrow 0} \log_2 |x|$ を求めよ。

例 24 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ を示す。

数学 B の数学的帰納法の例題で、 n が自然数のとき $n < 2^n$ を示した。よって、 $0 < n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n < 2^n \cdot$

$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ である。

はさみうちの原理より、

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

よって示された。

この例でみたように、極限を考えるとときの指数関数はかなり強く、 $x \rightarrow \infty$ のとき $0 < a < 1$ であれば「(多項式) $\times a^x$ 」の形は必ず 0 に収束する。具体的には、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + x^2 + 1) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x = 0$$

などが成立する。これらは特に証明なしで「当たり前のこと」として用いてよいことが多い。

● 三角関数と極限

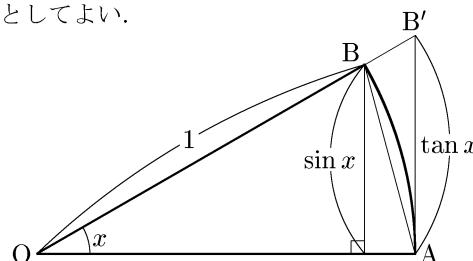
三角関数は $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ などいずれも周期関数なので、 $x \rightarrow \infty$ や $x \rightarrow -\infty$ のときは収束しない。たとえば $\sin x$ であれば -1 から 1 の間をいつたりきたりしているため、 $x \rightarrow \infty$ のとき振動していると理解した方がよい。よって、極限は存在しない。

また、 $\tan x$ は $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) という漸近線を持つため、その前後で $\pm\infty$ に発散している。

たとえば $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \tan x = \infty$ である。

例題 18 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であることを示せ。ただし x の単位はラジアンとする。

解) まず $x > 0$ のとき、つまり $x \rightarrow +0$ のときを示す。 $x \rightarrow 0$ のときの極限を考えるので $0 < x < \frac{\pi}{2}$ としてよい。



$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x, \quad \text{扇形 } OAB = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x,$$

$$\triangle OAB' = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x \text{ である。}$$

面積の大小関係より

$$\triangle OAB < \text{扇形 } OAB < \triangle OAB'$$

よって $\sin x < x < \tan x$

$$\sin x > 0 \text{ で割って } 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{逆数をとって } 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

はさみうちの原理より

$$1 \geq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow +0} \cos x = 1$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

また $x < 0$ のとき $x = -t$ とおくと $t > 0$ より

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

以上より示された。 ■

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つということは、 x が 0 に十分近いところでは $\frac{\sin x}{x} \doteq 1$ となることを意味する。

実際、 $\sin 1^\circ = \sin \frac{\pi}{180} = 0.01745329 \cdots$ であるが、 $\frac{\pi}{180} = 0.01745240 \cdots$ であるからよく一致しているといえる。

ちなみに、 $\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \sin 0.5236 = 0.5$ である。有効数字 3 桁以上一致するのは度数法で 3° 未満のときになるが、これらの近似式は工学などでよく用いられる。

例題 19 次の極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

考え方

$\frac{\sin \star}{\star}$ の形で $\star$ が 0 にいくとき、式全体の値が 1 に収束するのだから、 $\sin$ の中身の形に合わせて変形すればよい。あとは、三角関数の基本公式を使う。

解) (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$
(ほかに $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ を用いる方法もある)

$$(2) \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$

よって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{(1 + \cos x)} \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

問題 31 次の極限値を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} \\ (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} & \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} \\ (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} & \end{aligned}$$

問題 32 極限が次のような形で表されるとき収束を考え、収束する場合は極限値がどのような値になるか答えよ。また不定形である場合はそのように答えよ。

$$\begin{aligned} (1) 2^\infty & \quad (2) 5^{-\infty} & (3) \log_2(+0) \\ (4) \log_{+0} \infty & \quad (5) \sin(-\infty) & (6) \tan \infty \\ (7) 0 \cdot \cos \infty & \quad (8) \infty \cdot \sin 0 & (9) (+0)^{-\infty} \\ (10) (+0)^{+0} & \quad (11) 0 \cdot \log_2 \infty & (12) \infty^0 \end{aligned}$$

2.7 連続関数

放物線や 3 次関数、三角関数や指数関数のような関数は、グラフを書くと「つながって」いる。そのような関数を連続関数という。では、連続でないような「つながっていない」関数はどのようなものだろうか。

まず、ある点で連続であるという定義を述べる。

ある点で連続

関数 $f(x)$ がある点 $x = a$ において、

1. a が関数の定義域に入っている
2. $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限値が存在して
3. その極限値 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が $f(a)$ に等しい

とき、関数 $y = f(x)$ は $x = a$ において**連続である**という。

つまり、定義域において a に近づいていったときの値と a を代入した値が等しければその点で関数が連続であるという。もっと簡単にいえば

「定義域内の点 $x = a$ について $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ であれば $x = a$ で連続」となる。

定義域内のすべての点で連続である関数のことを**連続関数**という。

また、 $f(x)$ がある点 $x = a$ で連続でないとき、 $x = a$ で**不連続である**という。

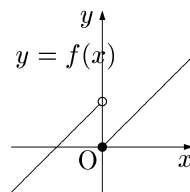
例 25

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

という関数を考える。定義域は実数全体となるが、 $x = 0$ において

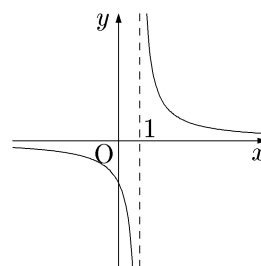
$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) =$$

0 となることから、極限値 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在しない。よって、定義より関数 $f(x)$ は $x = 0$ において連続ではない。これは、図からも明らかである。



例 26 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ という関数を考える。

一見、 $x = 1$ において不連続である（連続でない）ような気がする。しかし、 $f(x)$ の定義域 $x \neq 1$ より、 $x = 1$ は定義域に含まれない。 $f(x)$ は定義域の全ての点で連続であるから、連続関数である。



$f(x)$, $g(x)$ が連続関数のとき, $kf(x)$ (k は実数), $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) のいずれも連続関数である.

ある値からある値までの範囲

$$a < x < b, a \leq x \leq b, a \leq x < b, a < x \leq b$$

を**区間**といい, それぞれ

$$(a, b), [a, b], [a, b), (a, b]$$

と表す. 特に (a, b) を**開区間**, $[a, b]$ を**閉区間**という.

また, 片方の端を取り去った

$$a < x, a \leq x, x < b, x \leq b$$

も区間と呼び, それぞれ

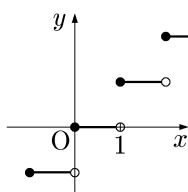
$$(a, \infty), [a, \infty), (-\infty, b), (-\infty, b]$$

と表す. 特に, 実数全体も区間の1つと考え $(-\infty, \infty)$ と表すことができる.

ある区間の中の全ての点において $f(x)$ が連続であるとき, $f(x)$ はその区間で連続であるという.

例 27 関数 $y = [x]$ を考える.

ここで $[\]$ とは, 括弧内の数を超えない最大の整数をとるもので, **ガウス記号**という. 定義から $[2.8] = 2$, $[0.9] = 0$, $[-0.4] = -1$ 等々となる.



この関数は x が整数のところで不連続となっているが, それ以外では連続である. よって, たとえば開区間 $0 < x < 1$ で $y = [x]$ は連続であるといえる.

数学小話

上の例において, $f(x)$ は閉区間 $[x]$ で連続であるとはいえない. なぜならば, 右端の極限値は $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0$, 代入値は $f(1) = 1$ であり, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) \neq f(1)$ となる. 片側極限の形ではあるが, 連続の定義を満たさないからである. なお, 左端の端点 $x = 0$ においては連続であるといえる. よって, $f(x)$ は半開区間 $0 \leq x < 1$ で連続である.

問題 33 次の関数のグラフをかいて, 与えられた区間において不連続である x の値を求めよ.

(1) $y = [2x]$ ($0 < x < 1$)

(2) $y = [\sin x]$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)

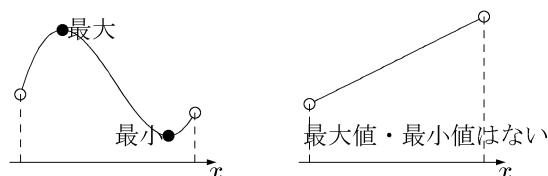
(3) $y = [x^2]$ ($0 \leq x \leq 2$)

端点を含む区間 (すなわち閉区間) でグラフをかくと, 最大値・最小値になる可能性があるのは端点での値もしくは極値である. よって, 一般に次の定理が成り立つ.

最大値と最小値

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であるとき, $f(x)$ は (その区間において) 最大値と最小値を持つ.

仮に端点を含まない (すなわち開区間) ところでグラフを書いても, 下左図のように最大値や最小値が定まることもある. しかし, 端点を含まない場合に下右図のような場合が出てくるので, 必ず最大値・最小値をもつためには閉区間でなければならない.



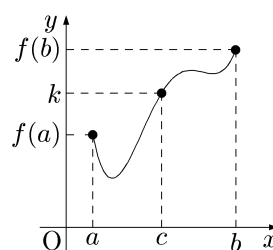
また, 連続関数では次の**中間値の定理**が成り立つ.

中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であるとき, $f(a) \leq k \leq f(b)$ となる任意の値 k に対して $f(c) = k$ となる実数 c が閉区間 $[a, b]$ に少なくとも1つ存在する.

x 軸を時間, y 軸を位置と考えて物理的な比喻を用いて説明してみる.

ある一本道の上を時刻 a から時刻 b まで人が動いていくとき, その人の位置を $f(x)$ と表すしよう. 出発点は $f(a)$, 到着点は $f(b)$ となる. うろろ動いてもいきなり別の場所に瞬間移動することは



ないので, この運動は連続であるとしてよい. であれば, 出発点から到着点までの間の点を, いつかはわからないがある時刻に通過していることになる. つまり, $f(a) \leq k \leq f(b)$ となる任意の位置 k を, 時刻 a から b までの間のいつかに通過している. それが時刻 c であって, $f(c) = k$ となる.

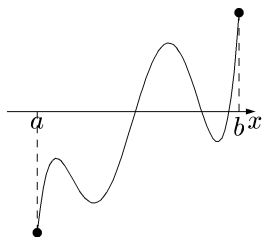
なお, 上図からわかるように $f(a) \leq k \leq f(b)$ よりも広く, 最小値から最大値までの間の任意の値 k に対しても中間値の定理は成り立つ.

中間値の定理から, 次も成り立つことがわかる.

— 中間値の定理—その2—

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で、 $f(a)$ と $f(b)$ が互いに異符号であれば、方程式 $f(x) = 0$ は $[a, b]$ に少なくとも1つ解をもつ。

方程式が解を持つという表現になっているが、方程式の解とはグラフにおける x 切片のことである。右図を見れば中間値の定理そのものだと理解できるだろう。



一言でいえば x 軸の下から上、もしくは上から下に移動するときには、どこかで x 軸を通過しているということであり、その通過したポイントが解である。

また、グラフは途中で行ったり来たりしている場合があるので、解は複数あってもよい。実際、上の図の例では解が3つある。

例題 20 方程式 $x^2 - 3^x = 0$ が区間 $-1 < x < 1$ において少なくとも1つ解を持つことを示せ。

— 考え方 —

このタイプの問題は数学 I の問題集等で既にやっているが、数学 III では中間値の定理を意識した解答を書きたい。「連続である」という条件を書けるようにしよう。

解) $f(x) = x^2 - 3^x$ とおくと、 $f(x)$ は閉区間 $[-1, 1]$ において連続である。

また、 $f(-1) = \frac{2}{3} > 0$ 、 $f(1) = -2 < 0$ であるから、方程式 $f(x) = 0$ は区間 $-1 < x < 1$ において少なくとも1つ解を持つ。 ■

ある閉区間で連続であることを明記すること。中間値の定理を使うため、开区間では条件として足りない。端点を含むという条件が大切になる。

問題 34 次の方程式が与えられた区間において少なくとも1つ解を持つことを示せ。

- (1) $-x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$ ($x \geq 2$)
- (2) $x + \cos x = 0$ ($-\pi \leq x \leq \pi$)
- (3) $2^x + \sin x = 0$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)

— 数学小話 —

$x^2 - 3^x = 0$ の解は代数的な計算では求められないため、実際の答がほしいときはコンピュータによる近似計算をする。きちんと計算して求められないのに解がある区間に存在するということは証明できる、というのはやや奇妙な気がするが、学問としての数学では、具体的な解そのものよりも、解が存在するかどうかといった存在証明などを研究していることが多い。

第3章

微分法

3.1 整式の微分と応用

● 導関数

まず基本的事項の復習からはじめよう。

関数 $f(x)$ について極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在するとき、その極限値を $f'(a)$ と表して $x = a$ における**微分係数**という。このとき、 $f(x)$ は $x = a$ において**微分可能**であるという。

ここで $a + h = x$ とおくと、 $h \rightarrow 0$ は $x \rightarrow a$ を意味するので、

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

とも表される。

関数 $f(x)$ が $x = a$ において微分可能であるとき、定義から $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在する。このとき $f(x) - f(a)$ の $x \rightarrow a$ における極限を考えてみると、

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

となるから、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ がなりたつ。つまり、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ の極限値が存在して、代入した値 $f(a)$ と一致するので、 $x = a$ において連続であるという定義をみたす。このことから次の定理が成り立つ。

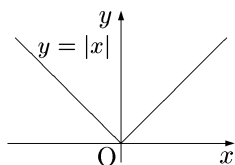
微分可能性と連続性

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるならば、 $f(x)$ は $x = a$ において連続である。

ただ、連続であるならば微分可能であるということはいえない。

例 1 関数 $y = |x|$ は実数全体で連続であるが $x = 0$ において微分できない。

実際、



$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = -1$$

のように近づき方によって極限が異なるため、 $h \rightarrow 0$ のときの極限は存在しない。ゆえに、定義より微分不可能となる。

この例から類推して単純に言えば、「とんがっている」ところでは微分できない。微分できるところは「まっすぐ」か「なめらかに曲がっている」場合である。

問題 1 次の命題は偽である。反例をあげて、そのことを説明せよ。

【07・静岡大】

区間 $(-1, 1)$ で定義された関数 $f(x)$ について、 $f(x)$ が $x = 0$ で連続ならば、 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である。

数学小話

何カ所かで「とんがっている」グラフはすぐかけるので、何カ所かで微分不可能な関数は簡単に作れる。しかし、全ての点で微分不可能な、すなわち至る所でとんがっているようなグラフは想像しがたい。

日本を代表する数学者・高木貞治 (1875—1960) は、区間 $[0, 1]$ において連続だが、その区間のどの点でも微分不可能な関数（高木関数と呼ばれる）を作ったことで有名である。

$f(x)$ がある定義域において、どの点でも微分可能であるとき、関数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を考えることができる。これを記号で $f'(x)$ と表し $f(x)$ の**導関数**という。(p.3)

$y = f(x)$ とおくと、導関数は

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}y, \quad \frac{d}{dx}f, \quad \frac{df}{dx}(x), \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

などと表すこともある。つまり「 x で微分する」という記号が $\frac{d}{dx}$ であると理解しておけばよい。

例題 1 定義に基づいて $f(x) = \sqrt{x}$ を微分せよ。

$$\begin{aligned}
 \text{解) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

問題 2 定義に基づいて次の式を微分せよ.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x) &= \sqrt{2x-1} & (2) \quad f(x) &= \sqrt{x^2+1} \\
 (3) \quad f(x) &= \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

● 整式の微分再び

数学Ⅱにおいて $f(x) = x^n$ の微分を学んだが、ここでもう一度 2 項定理を用いて示す.

$$(x+h)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1} h + {}_nC_2 x^{n-2} h^2 + \cdots + h^n$$

であるから,

$$(x+h)^n - x^n = {}_nC_1 x^{n-1} h + {}_nC_2 x^{n-2} h^2 + \cdots + h^n$$

よって,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left({}_nC_1 x^{n-1} + {}_nC_2 x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1} \right) \\
 &= {}_nC_1 x^{n-1} \\
 &= nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

より, 次の微分公式が得られる.

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

定数を微分したら 0 になることより, 上の式は $n = 0$ でも成り立つといえる. この公式と数学Ⅱで学んだ次の公式を組み合わせると, 一般の整式 (多項式) が微分できることがわかる.

微分の基本公式

1. $(k)' = 0$ (定数の微分は 0)
2. $(kf(x))' = kf'(x)$ (k は定数)
3. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

また, 1 章で学んだ積の微分公式・合成関数の微分公式を用いると, 微分の計算がうまくできる.

積の微分公式

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

合成関数の微分

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

例 2 $f(x) = (x^2 + 3x + 4)^3$ を微分する.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3(x^2 + 3x + 4)^2 \cdot (x^2 + 3x + 4)' \\
 &= 3(2x + 3)(x^2 + 3x + 4)^2
 \end{aligned}$$

例 3 $f(x) = (x^2 + 1)^2(2x + 3)^4$ を微分する.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= ((x^2 + 1)^2)'(2x + 3)^4 + (x^2 + 1)^2((2x + 3)^4)' \\
 &= 2 \cdot 2x(x^2 + 1)(2x + 3)^4 + (x^2 + 1)^2 \cdot 4(2x + 3)^3 \cdot 2 \\
 &= (x^2 + 1)(2x + 3)^3(4x(2x + 3) + 8(x^2 + 1)) \\
 &= (x^2 + 1)(2x + 3)^3(16x^2 + 12x + 20)
 \end{aligned}$$

問題 3 次の整式を微分せよ.

- (1) $f(x) = (x + 3)^3(x - 2)^4$
- (2) $f(x) = (3x^2 - x)^4$
- (3) $f(x) = (x^3 - x)^3(x^3 + x)^3$
- (4) $f(x) = (x + 1)^3(x + 2)^3(x + 3)^3$

● 商の微分

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ を定義に基づいて微分する.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h)x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h)x} \\
 &= -\frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

よって,

x^n の微分—その 2—

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

これは, x^n の微分 $(x^n)' = nx^{n-1}$ において, $n = -1$ を代入した式と一致する.

実際, $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$ となる.

ここで合成関数の微分を用いると,

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} \text{ のとき}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x)$$

となる.

— 商の微分公式—その1—

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

問題4 定義に基づいて $y = \frac{1}{g(x)}$ を微分することで商の微分公式を求めよ.

商の微分を利用すると,

$f(x) = x^{-n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x^n} \right)' = -\frac{1}{(x^n)^2} \cdot (x^n)' \\ &= -\frac{1}{x^{2n}} \cdot nx^{n-1} = -nx^{n-1-2n} \\ &= -nx^{-n-1} \end{aligned}$$

となり, $(x^n)' = nx^{n-1}$ は $n = -1, -2, -3, \dots$ においても成り立つことがわかる. よって, 次の公式が導かれた.

— x^n の微分—その3—

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \text{ は整数})$$

問題5 次の関数を微分せよ.

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= \frac{1}{x^5} & (2) f(x) &= \frac{1}{x+3} \\ (3) f(x) &= \frac{1}{x^2+1} & (4) f(x) &= \frac{1}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

分数関数は一般に $y = \frac{x^2+2x+3}{x+4}$ のような形をしている. これらの式の微分を考えるときは,

$y = (x^2+2x+3) \cdot \frac{1}{x+4}$ として積の微分公式を活用するとよい. すなわち

$$\begin{aligned} y' &= (2x+2) \cdot \frac{1}{x+4} + (x^2+2x+3) \cdot \frac{-1}{(x+4)^2} \\ &= \frac{(2x+2)(x+4) - (x^2+2x+3)}{(x+4)^2} \\ &= \frac{x^2+8x+5}{(x+4)^2} \end{aligned}$$

一般の場合は $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ を同じような形で微分すれば公式が得られる.

問題6 $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ とみて積の微分公式を用い, $\frac{f(x)}{g(x)}$ の微分公式を求めよ.

— 商の微分公式—その2—

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

分数関数の微分を考えるとき, 割り算をしてから微分した方が簡単なことがある.

実際, 上の例では

$$y = \frac{x^2+2x+3}{x+4} = x-2 + \frac{11}{x+4} \text{ であるから,}$$

$$y' = 1 - \frac{11}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x+5}{(x+4)^2} \text{ と簡単に計算できる.}$$

例題2 次の式を微分せよ.

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= \frac{x}{x^2+1} \\ (2) f(x) &= \frac{x^3-x^2+x+1}{x-1} \end{aligned}$$

解) (1) 商の微分公式を用いる.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$(2) \frac{x^3-x^2+x+1}{x-1} = x^2+1 + \frac{2}{x-1} \text{ である.}$$

よって,

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2(x^3-2x^2+x-1)}{(x-1)^2}$$

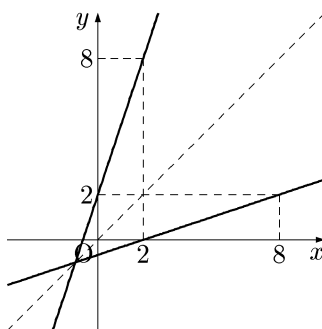
問題7 次の式を微分せよ.

$$(1) f(x) = \frac{2x^2-x}{x^2+1} \quad (2) f(x) = \frac{x^2+4x-1}{x+3}$$

● 逆関数の微分

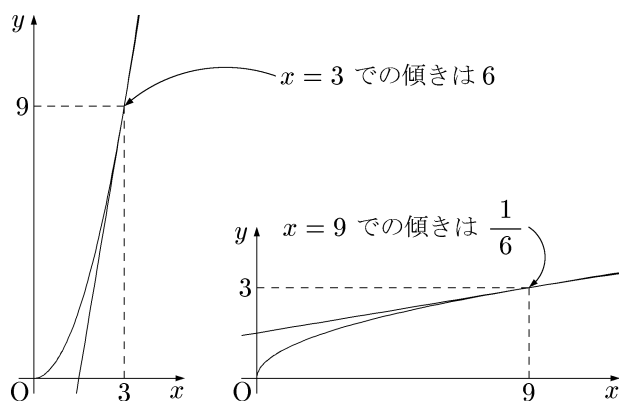
逆関数の節でやったことを思い出してみよう.

$y = 3x+2$ 上の点 (2, 8) と, その逆関数 $y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$ 上の点 (8, 2) は互いに対応している. このとき, 元の関数 $y = 3x+2$ の $x=2$ における微分係数 3 と, 逆関数 $y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$ の $x=8$ における微分係数 $\frac{1}{3}$ は, 互いに逆数の関係になっている.



同様に、 $y = f(x) = x^2$ ($x \geq 0$) 上の点 (3, 9) における微分係数と、その逆関数 $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) 上の点 (9, 3) における微分係数を比べてみる。

元の関数は微分すると $f'(x) = 2x$ より求める微分係数 $f'(3) = 6$ 。また、逆関数では例題 (p.30) の答より $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ であるから $(f^{-1})'(9) = \frac{1}{6}$ となり、やはり互いに逆数の関係になっている。



逆関数の微分法は次のようにして求める。 $f(x)$ の逆関数が存在するとき、 $y = f^{-1}(x)$ とおくと $x = f(y)$ である。この両辺を x で微分すると、

$$1 = f'(y) \cdot y' \text{ となる。}$$

これは、まず $f(y)$ を y の式と考えて微分し、合成関数の微分であるから中身の微分である y' を後でかけるということだ。これをより正確に表すと、

$1 = \frac{d}{dx} f(y) = \frac{d}{dy} f(y) \cdot \frac{dy}{dx}$ となり、 $x = f(y)$ を代入すれば

$$1 = \frac{d}{dy} x \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

という式を得る。よって、次の逆関数の微分公式が成り立つ。

逆関数の微分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

分数だと考えれば成り立って当然の形だ。これは、 x で微分するのが辛ければ y で微分して計算すればよいということを表す関係式である。なお、 y で微分するためには $\frac{d}{dy}$ をかければよい。

例 4 $y = \sqrt{x}$ の微分を求める。

$$y^2 = x \text{ より両辺を } y \text{ で微分して } 2y = \frac{d}{dy} x = \frac{dx}{dy}$$

$$\text{よって、} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ となる。}$$

問題 8 $y = \sqrt[3]{x}$ の微分を求めよ。

例題 3 p が整数のとき $y = x^{\frac{1}{p}}$ ($x \geq 0$) を微分せよ。

解) 逆関数は $x = y^p$ である。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{py^{p-1}} = \frac{1}{p} y^{1-p}$$

ここで $y = x^{\frac{1}{p}}$ を代入して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p} (x^{\frac{1}{p}})^{1-p} = \frac{1}{p} x^{\frac{1-p}{p}} = \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1}$$

ここで示された $(x^{\frac{1}{p}})' = \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1}$ という式は、

$(x^n)' = nx^{n-1}$ を彷彿とさせる。

問題 9 p, q が整数のとき $y = x^{\frac{q}{p}} = (x^{\frac{1}{p}})^q$ として合成関数の微分を用いて $(x^{\frac{q}{p}})' = \frac{q}{p} x^{\frac{q}{p}-1}$ を示せ。

以上より、次の微分公式が得られた。

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad (r \text{ は有理数})$$

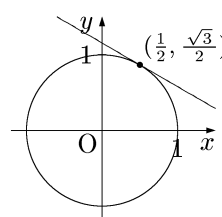
● 陰関数の微分

単位円 $x^2 + y^2 = 1$ について微分を考えよう。

変形すると $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ と表せる。+ と - の場合分けが必要になるが、 y を x の関数として表せるので、微分はできる。このように x と y が関係式 $F(x, y) = 0$ を満たすときに y を x の式として表せるならば、 y のことを x の**陰関数**という。

$y = \pm\sqrt{1-x^2}$ を微分すれば $y' = \mp 2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ を得る。(複号同順)

よって、点 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ における接線の傾きは、円の上部であるから $y = \sqrt{1-x^2}$ より $y' = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。



このようにして単にグラフだけでなく、方程式によって表される図形上の点での傾きが微分によって計算できる。

ここで、 $x^2 + y^2 = 1$ の微分をもう一度考えよう。

y は x の関数で表せる(陰関数)ため、仮に $y = f(x)$ のようにおくと、この式は

$x^2 + \{f(x)\}^2 = 1$ と表せる。左辺は x の関数の形をしているから、当然 x で微分ができて、

$$(x^2 + \{f(x)\}^2)' = 2x + 2f(x) \cdot f'(x) \text{ となる。}$$

よって、 $x^2 + y^2 = 1$ の両辺をそれぞれ x で微分することによって (右辺は 1 より微分したら 0),

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ となり, } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ を得る.}$$

これによると, 点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ より上と同じ結果が得られた.}$$

この方法では $\pm$ の場合分けの議論をしないで正しい結果を得ることができる. このような, 式の中に陰関数が入っている場合の微分を**陰関数の微分**という. 計算自体は合成関数の微分そのままであるから, 難しいものではない.

問題 10 $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ を微分して $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ が得られることを確認せよ.

問題 11 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式を求めよ.

例題 4 y が x の関数で $x^3 - 2xy + y^2 = 0$ が成り立つとき $\frac{dy}{dx}$ を x, y の式で表せ.

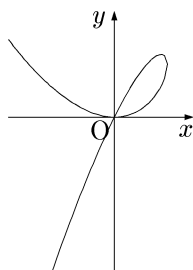
解) 両辺を x で微分すると

$$3x^2 - 2(xy)' + 2(y^2)' = 0$$

$$3x^2 - 2y - 2xy' + 2yy' = 0$$

よって

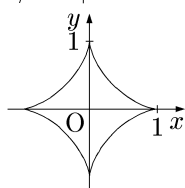
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3x^2}{2y - 2x} \quad \blacksquare$$



問題 12 y が x の関数で $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ が成り立つとき

$$\frac{dy}{dx} \text{ を } x, y \text{ の式で表せ.}$$

この曲線をアステロイド (asteroid), または星形という.

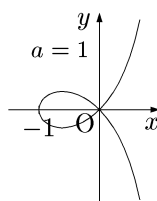


問題 13 y が x の関数で

$$(x+a)x^2 + (x-a)y^2 = 0 \text{ が成り立つ}$$

とき $\frac{dy}{dx}$ を x, y の式で表せ.

この曲線を葉形線 (strophoid) という.



また, y を 2 回微分するので, $\frac{d}{dx}$ を 2 回かけて,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \right) y = \frac{d^2}{dx^2} y = \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ とも表される.}$$

第 2 次導関数は他に

$$y'', \frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2} f, \frac{d^2 f}{dx^2}(x), \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

などと表すこともある.

例 5 $y = x^3 - x^2 + 3x - 7$ の第 2 次導関数を求めよ.

$$y' = 3x^2 - 2x + 3 \text{ より } y'' = 6x - 2$$

例題 5 $y = \sqrt{x}$ の第 2 次導関数を求める.

$$\text{解) } y = x^{\frac{1}{2}} \text{ より } y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{よって, } y'' = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \quad \blacksquare$$

問題 14 次の関数の第 2 次導関数を求めよ.

$$(1) y = x^8 \quad (2) y = (x^2 + 1)^4$$

$$(3) y = \frac{1}{x} \quad (4) y = \frac{1}{2x-1}$$

$$(5) y = x\sqrt{x} \quad (6) y = \sqrt{x^2-1}$$

第 2 次導関数がさらに微分可能なとき, その導関数を第 3 次導関数といい, y''' などと表す. 以降**第 n 次導関数**が定義され, 記号で $y^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$ などと表される.

第 2 次以上の導関数のことをまとめて**高次導関数**と呼ぶが, 数学や物理で重要な意味を持つとして用いられるのは主に第 2 次導関数までである. (p.46)

問題 15 関数 $y = \log(2x-1)$ の第 n 次導関数を推定し, それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ.

【06・弘前大】

● 高次導関数

$y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が微分可能のとき, さらに $f'(x)$ を微分することができる. $f'(x)$ の導関数を**第 2 次導関数**といい, $f''(x)$ と表す.

3.2 いろいろな関数の微分

この節では数学Ⅱで学んだ三角関数や対数関数などのいろいろな関数の微分について学ぶ。三角関数では倍角公式・半角の公式などの公式に加えて和積・積和の公式まで用い、指数・対数関数の式変形も頻出する。これらの計算を苦手とする場合などはその都度数学Ⅱの参考書等に戻って練習することを勧めておく。

● 三角関数の微分

まず、和積の公式のうちひとつを思い出しておく。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

の辺々を引いて

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

ここで、 $\alpha + \beta = A$, $\alpha - \beta = B$ とおくと

$$\alpha = \frac{A+B}{2}, \beta = \frac{A-B}{2} \text{ となるから,}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \text{ を得る.}$$

では $y = \sin x$ を微分しよう。

定義より

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot 2 \cos \frac{(x+h)+x}{2} \sin \frac{(x+h)-x}{2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \cdot \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \\ &= 1 \cdot \cos x \quad \left(\because \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \right) \end{aligned}$$

よって $(\sin x)' = \cos x$ である。

$y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ 平行移動すれば $y = \cos x$ のグラフになる。よって、 $\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ であるから、

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \left(\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right)' \\ &= \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

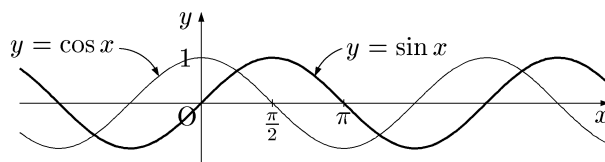
より $(\cos x)' = -\sin x$ である。

— $\sin x, \cos x$ の微分 —

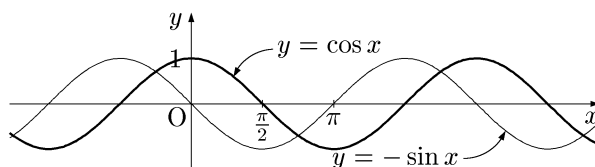
$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \end{aligned}$$

三角関数の微分をグラフを用いて表してみる。

$(\sin x)' = \cos x$ は、 $\sin$ を微分すると x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ 平行移動させていると考えることができる。(下図参照)



同様に、 $(\cos x)' = -\sin x$ も、 $\cos$ を微分すると x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ 平行移動されている。(下図参照)



つまり、 $\sin x, \cos x$ については、「微分 = 平行移動」となる。移動量は $-\frac{\pi}{2}$ で、 $\sin x, \cos x$ は周期 2π の周期関数であるから、4回微分したら元に戻る(確認せよ)。

例題 6 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \sin(x^2 - 1)$

(2) $y = \cos^3 x$

解) (1) $y' = \{ \cos(x^2 - 1) \} \cdot (x^2 - 1)' = 2x \cos(x^2 - 1)$

(2) $y' = \{ (\cos x)^3 \}' = 3 \cos^2 x \cdot (\cos x)'$
 $= -3 \sin x \cos^2 x$ ■

問題 16 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \cos 2x$

(2) $y = \sin^2 x$

(3) $y = \sin x \cos x$

(4) $y = \frac{1}{\sin x}$

例題 7 $y = \tan x$ を微分せよ。

解) $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ であるから、

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$
 ■

問題 17 $y = \frac{1}{\tan x}$ を微分せよ.

— $\tan x$ の微分 —

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

問題 18 次の関数を微分して第 2 次導関数を求めよ.

- (1) $y = \sin x$ (2) $y = \cos^2 x$
 (3) $y = \tan x$ (4) $y = \tan(1 - 2x)$

● 対数関数の微分

指数関数の前に対数関数の微分から考える. 対数の底を a ($0 < a < 1$, $1 < a$) とおいて $y = \log_a x$ を微分しよう.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) \end{aligned}$$

いきなりだがここで $t = \frac{h}{x}$ とおく. $h \rightarrow 0$ での極限を考えているので x は定数と見なしてよい. よって, $h \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ である. $h = xt$ を代入して,

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{xt} \log_a(1+t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

ここで $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ が $t \rightarrow 0$ のとき収束するのかが問題だが, 実際に収束して極限值を持つ. $y = \log_a x$ のグラフをみれば, 各点での傾きが存在するので極限值を持つと考えるのが自然であろう.

なお, $t > 0$ のとき

t	$(1+t)^{\frac{1}{t}}$
0.01	2.70481382942153
0.001	2.71692393223559
0.0001	2.71814592682493
0.00001	2.7182682371923
0.000001	2.71828046909575

$t < 0$ のとき

t	$(1+t)^{\frac{1}{t}}$
-0.01	2.73199902642903
-0.001	2.71964221644285
-0.0001	2.71841775501015
-0.00001	2.71829541998041
-0.000001	2.71828318767937

であるから, 2.718282 付近の値に収束しているようである. この値を e と表し, **自然対数の底** という.

正確な値は $e = 2.71828182845904523536 \dots$ である.

これを用いて $y = \log_a x$ の微分を表すと

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \\ &= \frac{1}{x} \log_a e \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log_e a} \\ &= \frac{1}{x \log_e a} \end{aligned}$$

よって $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log_e a}$ である.

特に, 底が e のときは $(\log_e x)' = \frac{1}{x \log_e e} = \frac{1}{x}$ である. 底が e である対数のことを**自然対数**という. 数学Ⅲでは自然対数のとき特にことわずに底 e を省略することが多い.

数学小話

工学などでは底が 10 のとき (常用対数) に省略する場合もあって混同しやすいため, 専門書では自然対数を $\ln$ という記号で表すことがある. すなわち $\ln x = \log_e x$ である.

ここでの $\ln$ は natural logarithm という自然対数の英語からきている.

対数関数の微分—その 1—

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

なお, $\log_a x$ の微分は, 底の変換公式を用いて次のように導くこともできる.

$$\begin{aligned} \log_a x &= \frac{\log x}{\log a} = \frac{1}{\log a} \log x \text{ より} \\ (\log_a x)' &= \left(\frac{1}{\log a} \log x\right)' \\ &= \frac{1}{\log a} (\log x)' \quad \left(\because \frac{1}{\log a} \text{ は定数}\right) \\ &= \frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x \log a}$$

例題 8 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \log_3 2x$

(2) $y = \log(x^3 + x)$

解) (1) $y' = \frac{1}{2x \log 3} \cdot (2x)' = \frac{1}{x \log 3}$
 (2) $y' = \frac{1}{x^3 + x} \cdot (x^3 + x)' = \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x}$ ■

問題 19 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \log(-5x)$

(2) $y = (\log x)^2$

(3) $y = \log_{10} x^2$

(4) $y = \frac{1}{\log x}$

$y = \log|x|$ の微分を考えてみる。

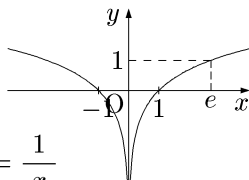
$0 < x$ のとき $y = \log x$

よって $y' = \frac{1}{x}$

$x < 0$ のとき $y = \log(-x)$

よって $y' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$

どちらの場合も $y' = \frac{1}{x}$ となるので、 $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$ と表せる。絶対値が消えてしまうのが奇妙な印象を与えるが、実際に上のグラフで $x = 1$ のときと $x = -1$ のときの傾きをみて納得していただきたい。



対数関数の微分—その 2—

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x \log a}$$

また、合成関数の微分を用いれば次の公式が導かれる。

対数関数の微分—その 3—

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

問題 20 上の公式を証明せよ。

問題 21 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \log|5x - 2|$

(2) $y = \log|\cos x|$

(3) $y = \log_3|x^2 + x|$

(4) $y = \log|\log x|$

● 指数関数の微分

底 a ($0 < a < 1$, $1 < a$) のとき $y = a^x$ を微分する。

このとき $x = \log_a y$ であるから、両辺を x で微分して

$$1 = \frac{1}{y \log a} \cdot \frac{dy}{dx}$$

よって、 $\frac{dy}{dx} = y \log a = a^x \log a$ である。特に $a = e$ のときは $(e^x)' = e^x \log e = e^x$ となり、微分しても元の関数そのままであるという面白い性質を持つ。

指数関数の微分

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \log a$$

例題 9 次の関数を微分せよ。

(1) $y = 3^{2x+1}$

(2) $y = e^{-x}$

解) (1) $y' = 3^{2x+1} \log 3 \cdot (2x+1)' = 2 \cdot 3^{2x+1} \log 3$

($23^{2x+1} \log 3$ と区別できるように・や×を必ず書くこと)

(2) $y' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}$ ■

問題 22 次の関数を微分せよ。

(1) $y = e^{-x^2}$

(2) $y = 2^{3x+1}$

(3) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(4) $y = xe^x$

(5) $y = e^x \sin x$

● 極限と e

対数関数の微分を考えたときに出てきた定数が e である。定義となった次の式を確認しておこう。

e となる極限—その 1—

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$t \rightarrow +0$ としても極限値は e である。このとき $t' = \frac{1}{t}$ とおくと、 $t \rightarrow +0$ のとき $t' \rightarrow \infty$ であるから、

$$e = \lim_{t \rightarrow +0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t' \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t'}\right)^{t'}$$

よって次の式も成り立つ。

e となる極限—その 2—

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

この式は、1 に非常に小さい数を足したものを、何乗もしていくという計算である。始めに計算したように $x = 0.01$ などを代入して様子を見ると、確かに収束はし

ているようだが様子がわかりにくい。

例えば括弧の中を 1 とすると、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 1^t = 1$$

である。しかし、どんなに 1 に近い数でも何乗もしていくと

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 1.00001^t = +\infty$$

のように無限大に発散してしまう。

この極限の式は、 t 乗される数がどんどん 1 に近づいていくことで、1 へいくのか ∞ へ発散するのかの綱引きが行われていて、その結果、間の e という数へ収束していくという意味を持つ。つまり、一種の不定形となっている。

不定形

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty \cdot 0, \infty - \infty$$

に加えて

$$1^\infty$$

も不定形である。

なお、不定形であることは実際に以降の問題を解くことで、形によって色々な収束先をもつことから明らかである。指数の形をもつ不定形は他にもあり、 0^0 などがみられる。ただ、受験数学の範疇では $0^0 = 1$ となることがほとんどである。

さて、 e を極限にもつもう一つの式を導くために $y = a^x$ を定義にしたがって微分してみよう。

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \end{aligned}$$

ところが $y' = a^x \log a$ であるから、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log a$$

を得る。ここで $a = e$ として e を代入することにより次の式が導かれる。この式を満たす e を自然対数の底として定義する流儀もある。

e となる極限—その 3—

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

例題 10 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$ の極限値を求めよ。

考え方

$(1 + \star)^{\frac{1}{\star}}$ の形で $\star$ が 0 にいくとき、式全体の値が e に収束する。 $\frac{\sin x}{x}$ の極限を考えるとと同じで、とにかく基本の形に変形させることが大事である。

解) $-x = t$ とおくと $x \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ である。また、 $(1-x)^{\frac{1}{x}} = (1+t)^{-\frac{1}{t}} = \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}$ であるから、

$$(\text{与式}) = \lim_{t \rightarrow 0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1} = e^{-1} \quad \blacksquare$$

問題 23 $\lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ の極限値を求めよ。

問題 24 次の極限値を求めよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ (ヒント: 分子を t とおけ)

● 対数微分法

前節で学んだ対数関数の微分を応用した計算法がある。

例えば $y = \frac{2x^2 + 1}{(x-1)^2(x+2)}$ を微分してみよう。商の微分公式を使うと

$$\frac{(2x^2 + 1)'(x-1)^2(x+2) - (2x^2 + 1)\{(x-1)^2(x+2)\}'}{\{(x-1)^2(x+2)\}^2}$$

というまことに計算したくない形になる。これくらいは計算できなければいけないのだが、より良い方法があれば是非採用したいものだ。

そこで、両辺の絶対値の自然対数をとる。

$$\begin{aligned} \log |y| &= \log \left| \frac{2x^2 + 1}{(x-1)^2(x+2)} \right| \\ &= \log |2x^2 + 1| - 2 \log |x-1| - \log |x+2| \end{aligned}$$

この両辺を微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{4x}{2x^2 + 1} - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$y' = y \left(\frac{4x}{2x^2 + 1} - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right)$$

となり、計算がやや見やすくなる。このようにして微分を計算する方法を**対数微分法**という。

分数関数の場合は

$$\frac{2x^2 + 1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+2}$$

と部分分数分解を用いてからそれぞれ微分するという計算法もあるが、いずれにしても一長一短である。自分がやりやすい形を用いればよい。

ただ、次のような場合は対数微分を用いなければ計算ができない。

α を実数とする。関数 $y = x^\alpha$ ($x > 0$) の微分を考えよう。

$y > 0$ より両辺の対数を取ると $\log y = \alpha \log x$ 。

これを微分すると $\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x}$ であるから、

$$y' = y \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha x^{-1} = \alpha x^{\alpha-1}$$

以上より、次の微分公式決定版を得る。

— x^n の微分 — その 5 —

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \text{ は実数})$$

例題 11 関数 $y = x^x$ ($x > 0$) を微分せよ。

解) $y > 0$ より両辺の対数を取ると $\log y = x \log x$

これを微分して $\frac{y'}{y} = \log x + x \cdot \frac{1}{x}$

以上より $y' = x^x (\log x + 1)$ ■

底の部分も指数部も関数の形になっている関数は対数微分法を使わなければ微分できない。整式の微分のように $(x^x)' = x \cdot x^{x-1}$ とはならないので注意すること。

問題 25 次の関数を対数微分法を用いて微分せよ。

$$(1) y = \frac{(x+1)^2(x+2)^2}{x-1}$$

$$(2) y = x^3(x+2)^2(x-1)^2$$

$$(3) y = (x+1)^x$$

$$(4) y = x\sqrt{x+2}$$

$$(5) y = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

● 媒介変数表示

変数 t を用いて x 座標と y 座標が $x = f(t)$, $y = g(t)$ と表されるとき、 t が色々な値をとると (x, y) は一般に

曲線を表す。

例えば、簡単な例として $x = 2t$, $y = t + 1$ を考えてみると、 t を消去することによって、描かれる曲線が直線 $y = \frac{1}{2}x + 1$ であることがわかる。このような曲線の表し方を**媒介変数表示**といい、変数 t を**媒介変数**という。 t の変域が特に指定されていないときは t は実数全体を動くものとする。

媒介変数表示では t の変化に対応して点が動いていくため、 (x, y) を**動点**と考えて、時刻 t における点の運動をイメージすると分かりやすいかも知れない。

例 6 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ とおくと、これは θ を媒介変数とした単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の媒介変数表示である。

例 7 $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ とおくと $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ を満たす。これは星形 (asteroid) の媒介変数表示である。(p.34)

$x = f(t)$, $y = g(t)$ と媒介変数表示で表される曲線について、微分 $\frac{dy}{dx}$ を考えるとき、次の式が成り立つ。

— 媒介変数表示の関数の微分 —

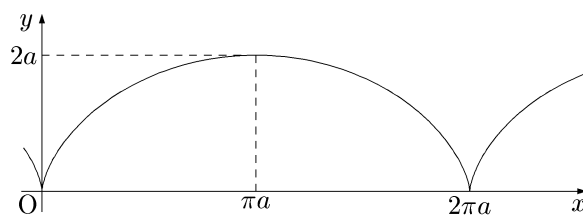
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

証明は、合成関数の微分と逆関数の微分を用いて

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \text{ となる。}$$

例 8 $x = 2t$, $y = t + 1$ のとき $\frac{dx}{dt} = 2$, $\frac{dy}{dt} = 1$ より $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ である。実際 t を消去すると $y = \frac{1}{2}x + 1$ であり、直接計算しても同様の結果を得る。

例 9 $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ で表される曲線をサイクロイド (cycloid) という。サイクロイドは、ある直線上で滑らないように円を転がしたときに円上の定点が描く曲線である。(下図)



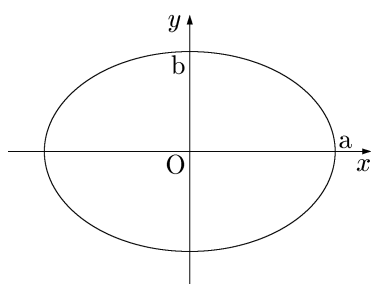
問題 26 サイクロイド曲線において $\frac{dy}{dx}$ を θ の関数

で表せ. また, $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ のときの $\frac{dy}{dx}$ の値を求めよ.

問題 27 媒介変数表示で $x = t^2, y = t - 1$ と表される曲線上の点 $(4, 1)$ における $\frac{dy}{dx}$ の値を求めよ.

例 10 $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ で表される曲線は, 作り方からわかるように単位円を x 方向に a 倍, y 方向に b 倍に拡大した曲線である. この曲線は**楕円**と呼ばれる.

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ を利用して θ を消去すると $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ となるが, これが楕円を表す図形の方程式である.



問題 28 上の楕円において $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときの $\frac{dy}{dx}$ の値を求めよ.

3.3 微分と傾き

● 接線と法線の方程式

数学Ⅱで学んだ公式がそのまま使える.

$y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における傾きは, 微分係数 $f'(a)$ であるので次の式が成り立つ.

— $x = a$ での接線の方程式 —

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

また, $f'(a)$ と垂直な傾きは $-\frac{1}{f'(a)}$ である.

$(a, f(a))$ を通り, そこでの接線に垂直な直線のことを $y = f(x)$ の $x = a$ における**法線**という.

— $x = a$ での法線の方程式 —

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

例題 12 $y = xe^x$ の $x = 1$ における接線および法線の方程式を求めよ.

解) 点 $(1, e)$ を通る.

$y' = e^x + xe^x$ より $x = 1$ での微分係数は $2e$

求める接線の方程式は $y - e = 2e(x - 1)$

よって $y = 2ex - e$

また, 求める法線の方程式は $y - e = -\frac{1}{2e}(x - 1)$

よって $y = -\frac{1}{2e}x + \frac{2e^2 + 1}{2e}$ ■

例題 13 原点から $y = \log x$ へひいた接線の方程式を求めよ.

考え方

接点がどこかわからないのだから, とりあえず接点の x 座標を t において接線の方程式を作り, それが原点 $(0, 0)$ を通ると考えて t の値を出せばよい.

解) $x = t$ における接線の方程式は

$y' = \frac{1}{x}$ より $y - \log t = \frac{1}{t}(x - t)$

原点を通るので $(0, 0)$ を代入して $-\log t = -1$.

これを解いて $t = e$.

よって求める接線の方程式は $y = \frac{1}{e}x$ ■

問題 29 次の曲線の与えられた x 座標における接線と法線の方程式を求めよ.

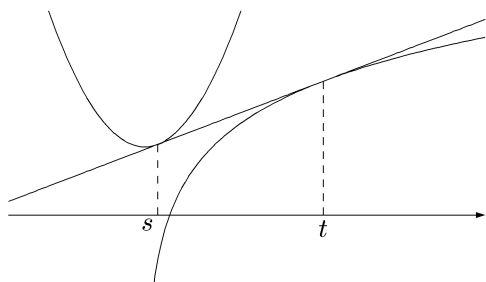
- (1) $y = e^x, x = 0$
 (2) $y = \log(x+1), x = 1$
 (3) $y = x \sin x, x = \frac{\pi}{2}$

問題 30 点 $(1, 0)$ から $y = (x+1)e^x$ へひいた接線の方程式を求めよ.

問題 31 サイクロイド曲線 $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ において $\theta = \frac{\pi}{4}$ における接線の方程式を求めよ.

● 共通接線

複数の曲線に同時に接する直線のことを**共通接線**という.



上の図からわかるように、共通接線は接点を複数持つ。よって、共通接線を求めるときは、それぞれの曲線の接点の x 座標を s, t のようにおいて接線の方程式を出し、その係数を比較するのが一般的な方法である。

例題 14 $y = x^2$ と $y = -\frac{1}{x}$ の両方に接する接線の方程式を求めよ.

解) それぞれの接点の x 座標を s, t とおく.

$y' = 2x, y' = \frac{1}{x^2}$ より、接線の方程式は

$y = 2sx - s^2, y = \frac{1}{t^2}x - \frac{2}{t}$ となる.

この2直線が一致する s, t の値を求めればよいので、係数を比較して $2s = \frac{1}{t^2}, s^2 = \frac{2}{t}$.

これを解いて $2s = \frac{1}{t^2}, s^2 = \frac{2}{t}$.

これを解いて $s = 2, t = \frac{1}{2}$ となる.

ゆえに、求める接線の方程式は $y = 4x - 4$ ■

— 考え方 —

本問のように2曲線的一方が2次式の場合、重解条件を用いて解くこともできる.

別解) $y = -\frac{1}{x}$ の接点の x 座標を t とおくと、接

線の方程式は $y = \frac{1}{t^2}x - \frac{2}{t}$ となる. これ

が $y = x^2$ と接するので、連立させた方程式 $x^2 - \frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t} = 0$ が重解を持てばよい.

よって、重解条件より

判別式 $D = \frac{1}{t^4} - 4 \cdot \frac{2}{t} = 0$

これを解いて $t = \frac{1}{2}$ となる.

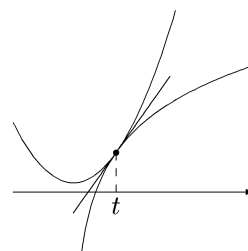
ゆえに、求める接線の方程式は $y = 4x - 4$ ■

なお、円や楕円といった2次曲線や、媒介変数で表された曲線などの接線と絡めた問題なども出題されることがある. 特に円の接線では、円の中心と直線の距離が半径が一致すれば接線になるなどの幾何学的な性質をうまく利用した問題などもあるため、数学Ⅱの図形と方程式の分野をもう一度復習しておくことをお薦めしておく.

● 2曲線が接する条件

2曲線が接するとは、2曲線が共有点を持ち、その共有点における双方の曲線の傾きが等しいときをいう.

接点の x 座標を t とおくと次の式が成り立つ.



2曲線が接する条件

2曲線 $y = f(x), y = g(x)$ が接するとき

$$f(t) = g(t), f'(t) = g'(t)$$

が成り立つ.

例題 15 放物線 $y = x^2 + a$ と曲線 $y = \log x$ が接するときの a の値を求めよ.

解) 接点の x 座標を t とおく.

また、それぞれの微分は $y' = 2x, y' = \frac{1}{x}$

接点の2曲線の共有点になっているので

$$t^2 + a = \log t \quad (t > 0) \cdots \text{①}$$

また、接点において傾きが一致するので

$$2t = \frac{1}{t} \cdots \text{②}$$

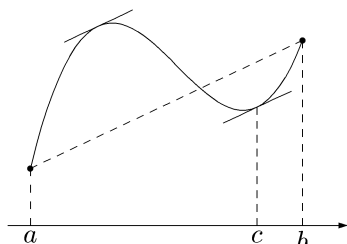
②より $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because t > 0)$ これを①へ代入して

$$a = \log \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(\log 2 + 1)$$
 ■

問題 32 放物線 $y = ax^2$ と曲線 $y = \log x$ が接するときの a の値と接点の座標を求めよ.

● 平均値の定理

区間 $[a, b]$ で連続な関数 $y = f(x)$ について考える. この関数の値が $[a, b]$ の間に变化した量は $f(b) - f(a)$ であるから, この間の**平均変化量**は次図の直線の傾き $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ となる.



この関数が, 端点を除く区間 (a, b) で微分可能であれば, 先に求めた平均変化量と同じ傾きを持つような点 $(c, f(c))$ が存在する. この図では2カ所あることがわかる.

これは**平均値の定理**と呼ばれ, 一般に成り立つことが知られている. ここでは証明は省く.

平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で, 开区間 (a, b) で微分可能なとき,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を満たす c が开区間 (a, b) に存在する.

平均値の定理はややわかりにくい表現であるが, 次のように考えると理解しやすい.

ある人が家から学校まで移動するとき, x を時間と考え, $f(x)$ がその時間の位置を表すとする. 時刻 a のときは家 $f(a)$ を出発し, 時刻 b のときは学校 $f(b)$ に到着することになる. このとき, 平均値の定理の左辺 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ は, 最終的な移動距離をかかった時間で割っているのだから, 家から学校まで移動したときの平均速度を表す.

しかし, 実際は常にこの速度で移動しているとは限らない. 途中信号で立ち止まったり, 寄り道をしたり, 慌てて急いで走っているかも知れないからである. しかし, 平均値の定理は「いつかはわからないけれども, まさに平均速度と同じ速度で移動している瞬間がある」ということを主張している. その瞬間が c である.

ここで具体的に数字を当てはめてみよう. 学校まで

1000m をちょうど 20 分で移動したとすると, 平均速度は 50 (m/分) である. もし, 平均速度が 50 (m/分) となる瞬間がひとつもなかったとしよう. すると, 速度の変化は連続的であるから, 移動速度はずっと 50 (m/分) 未満か, それより速いかのいずれかということになる. もし前者であれば 20 分経っても学校にたどり着いていないし, 後者であれば 20 分経ったときには学校をとうに通り過ぎてしまっていて矛盾する. だから, ある瞬間では 50 (m/分) より速いし, ある瞬間ではそれよりも遅い速度で移動していることになり, 速度の変化が連続的であることから, どこかでまさに 50 (m/分) の速度で移動していることになる.

数学小話

平均値の定理はロルの定理と呼ばれる定理から導かれる. ロルの定理は, $f(a) = f(b)$ であれば $f'(c) = 0$ となる点が存在するというもので, 先の例で説明すると, 家を出発して家に戻ってきた場合, 途中で速度が 0 になる瞬間が存在するというので, 簡単に言えばどこかで U ターンしているということである.

平均値の定理ははさみうちの原理と組み合わせると難易度の高い極限值を求める問題として出題されることが多い.

例 11 $y = x^2$ が $x = -1$ から $x = 3$ まで変化するとき, その平均変化量と同じ傾きとなるような点の x 座標を求めてみる.

$$\text{平均変化量は } \frac{3^2 - (-1)^2}{3 - (-1)} = 2$$

$$y' = 2x \text{ より } y' = 2 \text{ を解いて } x = 1.$$

問題 33 次の関数と与えられた区間において, その平均変化量と同じ傾きを持つような点の x 座標を求めよ.

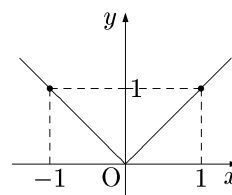
(1) $y = \sqrt{x}$, $[0, 4]$

(2) $y = x^3 - 3x$, $[-2, 2]$

(3) $y = \log x$, $[1, e^2]$

例 12 微分可能ではない関数の場合には平均値の定理は成り立たない. 関数 $y = |x|$ の开区間 $[-1, 1]$ における平均変化量

は 0 であるが, この区間において傾きが 0 となるような点は存在しない.



例題 16 次の不等式を平均値の定理を用いて証明せよ.

$$\frac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \frac{1}{a} \quad (a > 0)$$

考え方

単なる不等式の証明問題として解こうとすると
 $\frac{1}{a+1} < \log \frac{a+1}{a}$ 以降どつぽにはまる.

$\log(a+1) - \log a$ の形から, 区間 $[a, a+1]$ において平均値の定理を使うのではないかと見当を付けて始めてみる.

解) $y = \log x$ は $x > 0$ において連続かつ微分可能である. $y' = \frac{1}{x}$ であるから, 区間 $[a, a+1]$ において平均値の定理より $a < c < a+1$ であって
 $\frac{\log(a+1) - \log a}{(a+1) - a} = \frac{1}{c}$ を満たす c が存在する.
 $0 < a$ より $\frac{1}{a} > \frac{1}{c} > \frac{1}{a+1}$
 よって $\frac{1}{a} > \frac{\log(a+1) - \log a}{(a+1) - a} > \frac{1}{a+1}$
 ゆえに $\frac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \frac{1}{a}$ ■

問題 34 次の不等式を平均値の定理を用いて証明せよ.
 $a < e^a - 1 < ae^a \quad (a > 0)$

3.4 グラフの利用

● 増減表と極値

増減表の書き方は数学Ⅱで学んだときと同じである.

増減表の書き方

1. 微分して $f'(x) = 0$ となる x の値を求める. これは極値になりうる点である.
2. 1. で求めた x の値をもとに増減表の骨格をかく.
3. $f'(x)$ の値の正負を書き込んでいく.
4. $f(x)$ の増減を矢印でかく.
5. 端点や極値での値を求める.
6. 切片を求める.

数学Ⅲでは, 整式だけではないさまざまな関数を扱うため, 整式にはない特徴を持つことがある. よって, グラフをかくときにはこれまで注意しなくてもよかったことにも気を付けなければならない. 詳しい説明は次の節でするので, ここでは概要を述べることにする.

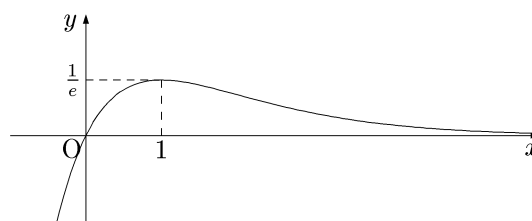
例題 17 $y = xe^{-x}$ の極値を求めよ.

解) $y' = (1-x)e^{-x}$ である. $y' = 0$ より $x = 1$.
 よって増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	+	0	-
y	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$x = 1$ のときに y は極大値 $\frac{1}{e}$ をとる. ■

この増減表をみれば, 上に凸な 2 次関数と同じ形のグラフを想像するが, $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ であることに注意するとグラフは次のようになる.



この例のような $x \rightarrow \infty$ のときに x 軸に近づいていく(漸近する)という性質は増減表には現れないので別途調べる必要がある.

問題 35 $y = x^2e^{-x}$ の極値を求めよ.

問題 36 $y = 2 \sin x + \cos 2x$ ($0 \leq x \leq \pi$) の極値を求めよ.

例 13 関数によっては y' の値が計算できないところで極値を持つこともある.

例えば $y = |x^2 - x|$ のグラフ (右図) をみると, $x = 0, 1$ において極小値 0 を持つことがわかる. このような例では, 実際にグラフをかいて判断すればよい.

なお, 「その付近で最小値となるような値を極小値と定義する」ので, 微分した値が 0 であれば極値だ, ということではない. ここでの例のようにグラフをかいてみないとわかりづらいこともある.

問題 37 $y = \sqrt{|x|}$ の極値を求めよ.

問題 38 $f(x) = \sqrt{2x^2 + x^3}$ とおく. $f(x)$ の増減表を書いて極値を求めよ.

● 最大値と最小値

増減表を用いて最大値および最小値を求めてみよう. 最大値および最小値となりうる点は, 極値か端点である. よって, 定義域がある範囲に限られているようなときは, 増減表をかくときに端点まで含めて表をつくとよい.

例題 18 関数 $y = x + \sqrt{1 - x^2}$ の最大値と最小値を求めよ.

解) 定義域は $1 - x^2 \geq 0$ より $-1 \leq x \leq 1$ である.

$$y' = 1 + \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y' = 0 \text{ より } 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$$

$$x = \sqrt{1 - x^2} \ (x \geq 0) \text{ を解いて } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x \geq 0 \text{ であるから } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって

x	-1	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
y'		+	0	-	
y	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

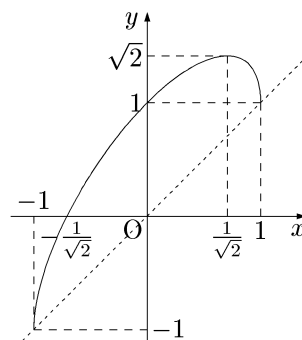
増減表より $x = -1$ で最小値 -1 ,

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ で最大値 } \sqrt{2} \text{ をとる.} \quad \blacksquare$$

実際にグラフをかくと右のようになるが, 最大値や最小値を求めるときにグラフをかく必要はない. 特に断りが無い限りは増減表をかくだけで十分である.

なお, グラフをかくときは切片の値を忘れずに求めておくこと.

ちなみにこのグラフは $y = x$ と $y = \sqrt{1 - x^2}$ を足したものであるから, 円の上半分を直線 $y = x$ に沿ってずらしていったものになっている.



問題 39 $y = x \sin x + \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) の最大値または最小値を求めよ.

問題 40 $y = \frac{\sin x}{2 - \cos 2x}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) の最大値・最小値を求めよ.

問題によっては, $x \geq 1$ や実数全体などでの最大値・最小値を考えることもある. その場合は $x \rightarrow \infty$ や $x \rightarrow -\infty$ などの関数の極限を求めてから考えなければならない.

例題 19 $y = xe^{-x}$ ($x \geq -1$) の最大値・最小値を求めよ.

解) $y' = (1 - x)e^{-x}$ より増減表は次のようになる.

x	-1	...	1	...
y'		+	0	-
y	$-e$	↗	$\frac{1}{e}$	↘

また $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ であるから,

y は $x = -1$ のとき最小値 $-e$ をとり,

$x = 1$ のとき最大値 $\frac{1}{e}$ をとる. $\blacksquare$

問題 41 $y = \log(x^2 + 1) - \log x$ の最大値または最小値を求めよ.

● 方程式と不等式

微分を利用するというよりはグラフを利用すると考えよう.

例題 20 a を定数としたときに $ae^x = x$ の異なる実数解の個数を調べよ.

考え方

$a = f(x)$ の形に変形し、 $y = f(x)$ のグラフと $y = a$ の直線の交点を数えるやり方が基本.

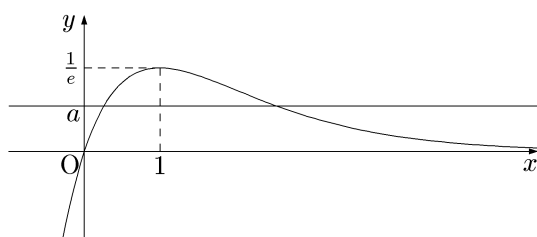
解) $a = xe^{-x}$ であるから $y = f(x) = xe^{-x}$ とおく.

$f'(x) = (1-x)e^{-x}$ で $y' = 0$ より $x = 1$.

よって増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	+	0	-
y	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ よりグラフをかくと



よって、図より実数解の個数は

$a \leq 0$ のとき 1 個

$0 < a < \frac{1}{e}$ のとき 2 個

$a = \frac{1}{e}$ のとき 1 個

$\frac{1}{e} < a$ のときなし

■

問題 42 a を定数としたときに次の方程式の異なる実数解の個数を調べよ.

(1) $x + a = e^x$

(2) $x + 1 = a(x^2 + 3)$

例題 21 $a(x+1) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ($x < 1$) の異なる実数解の個数を調べよ. ただし a は定数とする.

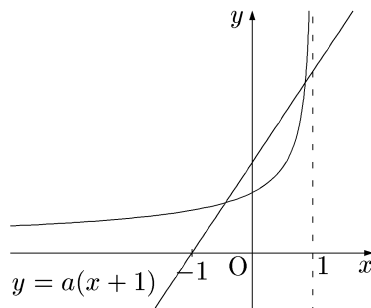
考え方

$a = f(x)$ とするのもよいが、計算が大変になる. 左辺の式が $(-1, 0)$ を通る傾き a の直線を表すことを利用して、グラフを用いて考えた方がよい.

解) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ を微分して

$$y' = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} > 0 \text{ よりこのグラフは単調増加.}$$

また、 $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +0$ であるからグラフは次のようになる.



このグラフと直線 $y = a(x+1)$ との交点の数を考えればよい. よって、接するときの傾きを求める.

$x = t$ における $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ の接線の方程式は

$$y = \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{2}}(x-t) + (1-t)^{-\frac{1}{2}} \text{ となる. これが点 } (-1, 0) \text{ を通るので、代入して}$$

$$0 = \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{2}}(-1-t) + (1-t)^{-\frac{1}{2}}$$

両辺に $(1-t)^{\frac{3}{2}}$ をかけて ($t < -1$ より $1-t \neq 0$)

$$0 = \frac{1}{2}(-1-t) + (1-t) \text{ より } t = \frac{1}{3}$$

このときの傾きは $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$ である.

よって、図より実数解の個数は

$$a > \frac{3\sqrt{6}}{8} \text{ のとき 2 個}$$

$$a = \frac{3\sqrt{6}}{8} \text{ のとき 1 個}$$

$$0 < a < \frac{3\sqrt{6}}{8} \text{ のときなし}$$

$$a < 0 \text{ のとき 1 個}$$

■

問題 43 方程式 $x^{\frac{3}{2}} - mx + 1 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつための実数 m の値の範囲を求めよ.

例題 22 $x > 0$ のとき、不等式 $e^x > 1 + x$ が成り立つことを示せ.

考え方

$f(x) = (\text{左辺}) - (\text{右辺}) > 0$ であることを示せばよい. 最小値が求まるならばその最小値が 0 より大きいことをいえばよいが、求まらないときは増減表を用いて示す. グラフをかく必要は特

解) $f(x) = (\text{左辺}) - (\text{右辺}) = e^x - (1+x)$ とおく.

$x > 0$ で $f(x) > 0$ であることを示せばよい.

$f'(x) = e^x - 1$ であるが, $x > 0$ で $e^x > 1$ より $f'(x) > 0$.

よって増減表は次のようになる.

x	0	...
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	↗

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = e^0 - 1 = 0$ で, $f(x)$ は $x \geq 0$ で連続で $x > 0$ で単調増加であるから, $x > 0$ において不等式 $e^x > 1+x$ が成り立つ. ■

問題 44 $x > 0$ のとき, 不等式 $e^x > 1+x$ が成り立つ. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 不等式 $e^x > 1+x + \frac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ.

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ であることを示せ.

問題 45 すべての正の数 x に対して不等式 $kx^2 \geq \log x$ が成り立つような定数 k のうちで最小のものを求めよ. ただし, $\log x$ は自然対数である. 【98・岡山理科大-理】

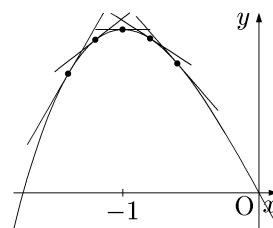
3.5 いろいろな関数のグラフ

● 第2次導関数と曲線の凹凸

ある関数を微分すると, その関数のグラフ上の点における傾きという情報が, 導関数という形で得られる. では, 導関数をさらにもう一回微分した**第2次導関数**からは, どんな情報が得られるだろうか.

$y = f(x) = x^3 - 3x$ を例に考えてみよう.

x 軸に関して左から右へとみていくと, まずはじめは調子よく上昇していくのだが, 少しずつその上昇の度合いにかげりが出てくる. そして, $x = -1$ の地点で傾きが 0 と



なり, やがて下へと傾いていく. このように, 傾きが小さくなっていくグラフの状態を, グラフが**上に凸**であるという. グラフが上に凸である区間では, 傾き, すなわち導関数 $f'(x)$ の値が減少していくことから, $f'(x)$ を微分した関数 $f''(x)$ の値が負であることがわかる.

次に, 極小値の前後でのグラフの挙動をみると, 傾きがだんだんと大きくなっている. このような区間ではグラフが**下に凸**であるといい, この区間では $f''(x)$ の値は正になる.

では, グラフが上に凸な状態から下に凸な状態へと切り替わる点では何が起きているのだろうか. これは, **グラフの曲がり具合が変化している点**であるから, **変曲点**と呼ばれる. 変曲点においては $f''(x)$ の値が正から負, もしくは負から正へ切り替わるので, 当然 $f''(x) = 0$ である.

以上より, 関数のグラフを特に正確にかくときには $f''(x)$ から得られる情報が欠かせないことがわかる. そのため, 基本的な増減表のかき方として, 以下の手順が必要となる.

変曲点

$f''(x) = 0$ であってその前後で $f''(x)$ の符号が変わるような点のことを変曲点と呼ぶ.

$f''(x)$ の符号が変わらないときは変曲点とは呼ばない. これは, $f'(x) = 0$ であってもその前後で符号が変わらないときは, その点が極値にならない(棚になる)ことと同様である.

増減表のかき方

1. まず微分. $f'(x) = 0$ となる x の値を求める. これは, 極値になりうる点である.
2. さらに微分. $f''(x) = 0$ となる x の値を求める. これは, 変曲点になりうる点である.
3. 上で求めた x の値をもとに増減表の骨格をかく.
4. $f'(x)$, $f''(x)$ の値の正負もしくは 0 の値をかき込んでいく.
5. $f(x)$ の増減を, 上に凸か下に凸かの情報を加えた曲がった矢印 $\searrow$ $\swarrow$ $\nearrow$ $\nwarrow$ でかく.

例 14 $y = x^3 - 3x$ のグラフを, 第2次導関数まで計算して丁寧にかいてみる.

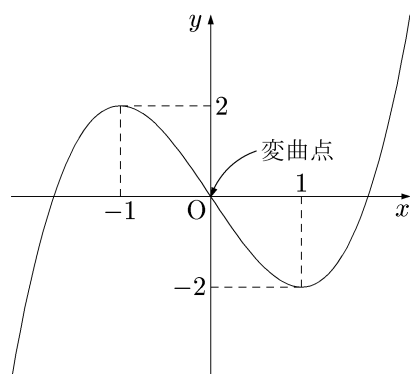
$f(x) = x^3 - 3x$ とおく. $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$ である.

$f'(x) = 0$ より $x = \pm 1$, $f''(x) = 0$ より $x = 0$.

よって増減表は次のようになる.

x	...	-1	...	0	...	1	...
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y	$\nearrow$	極小	$\searrow$	変曲点	$\swarrow$	極大	$\nwarrow$

また, $f(-1) = 2$, $f(1) = 2$, $f(0) = 0$ であるからグラフは次のようになる.



なお, 極値について次の性質が成り立つことに注意しておく.

極値と第2次導関数

関数 $y = f(x)$ について,

$f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$ であれば,

y は $x = a$ で極小値をもつ.

$f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0$ であれば,

y は $x = a$ で極大値をもつ.

問題 46 $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2$ において $f'(x)$, $f''(x)$ を計算し, $y = f(x)$ のグラフをできる限り詳しくかけ.

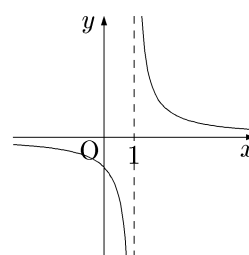
増減表を用いてグラフをかくため, 増減表によって得られる情報はとても重要である. 数学Ⅱのときと同じく, 増減表をきちんと正確にかけようようにしておきたい.

受験問題においては, 特に指定されずに「グラフの概形をかけ」といわれた場合は, 第2次導関数まで計算しなくてもよい. しかし, これからしばらくの間は練習のために必ず計算していくことにする.

また, 数Ⅲにおいてグラフをかくときには, 第2次導関数を計算しようがすまいが, 必ずチェックしておかなければならないポイントがある. 次の節からそのことを学んでいく.

● 漸近線

$y = \frac{1}{x-1}$ のグラフを考えると, $x = 1$ で y は $\pm\infty$ のいずれかに発散している. このグラフは, $x \rightarrow 1$ のとき右から近づいても左から近づいても直線 $x = 1$ に限りなく近づいていっている. これを**漸近する**といい, 曲線が漸近していく直線のことを**漸近線**という.



この例の場合, $x \rightarrow 1-0$ のときも $x \rightarrow 1+0$ のときも $x = 1$ に漸近しているので, 「 $x \rightarrow 1$ のとき $y = \frac{1}{x-1}$ は $x = 1$ を漸近線に持つ」と表現される.

$y = \frac{1}{x-1}$ のような分数の形をした関数では, 分母が 0 になるような x の値は定義域に含まれず, そこで関数の値が ∞ や $-\infty$ に発散することが多い. グラフはそのようなところで y 軸に平行な漸近線を持つ.

y 軸に平行な漸近線があるときグラフはそこで切れるが, そのことはグラフ全体の形に大きく影響する. だから, 後に増減表をかくときも, このような定義域外の点の値を抜かしてかいてはいけない.

y 軸に平行な漸近線

$x \rightarrow a-0$ か $x \rightarrow a+0$ のいずれかの場合に

$y = f(x)$ が ∞ か $-\infty$ に発散していれば,

$y = f(x)$ は $x = a$ を漸近線に持つという.

例 15 $y = \log x$ は $x \rightarrow +0$ のときに $x = 0$ を漸近線に持つ.

問題 47 次の関数の y 軸に平行な漸近線 ($x = k$ の形をした漸近線) を求めよ. また, 漸近線の右から近づいた場合と左から近づいた場合の y の値が $\pm\infty$ のいずれに発散しているか調べよ.

$$(1) y = \frac{1}{x+1} \quad (2) y = \frac{1}{3-x}$$

$$(3) y = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$$

y 軸に平行なタイプの漸近線は x がある特定の値に近づくときを考える. 逆に x がある特定の値に近づいたときの漸近線は y 軸に平行なものだけになる. よって, それ以外の漸近線は, 必ず $x \rightarrow \infty$ もしくは $x \rightarrow -\infty$ のときを考えることになる.

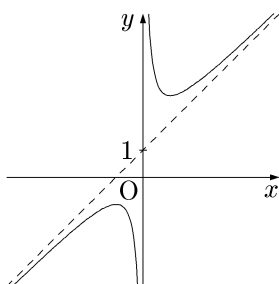
前述の $y = \frac{1}{x-1}$ のグラフにおいて $x \rightarrow \infty$ のときを考えてみると, $y \rightarrow 0$ であることがわかる. これは, $x \rightarrow \infty$ のときこのグラフが直線 $y = 0$ に漸近していることを意味する. よって, $x \rightarrow \infty$ のとき $y = \frac{1}{x-1}$ は $y = 0$ を漸近線に持つ. 同様に, $x \rightarrow -\infty$ のとき $y = 0$ を漸近線に持つことがわかる.

次に $y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ と
いうグラフの $x \rightarrow \pm\infty$ での
様子をみてみよう.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

であるが, グラフをみると
漸近線を持つようだ.



一般に $y = f(x)$ が $x \rightarrow \infty$ のとき $y = ax + b$ を漸近線に持つならば, $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$ が成り立つ.

漸近線の求め方

曲線 $y = f(x)$ が $x \rightarrow \infty$ のとき $y = ax + b$ を漸近線にもつならば

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - ax\}$$

なお, $x \rightarrow -\infty$ のときも同様である.

数学小話

x が十分に大きいとき $y = f(x)$ がある直線に漸近するのであれば, 曲線の傾き $f'(x)$ の極限值がその直線の傾きになる.

漸近線の傾き a は $a = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ としても求められるが, $\frac{f(x)}{x}$ だと微分しなくてよいので計算しやすい.

例題 23 $y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ の漸近線の方程式を求めよ.

考え方

y 軸に平行な漸近線の方程式は明らかなので答のみでもよい.

解 直線 $x = 0$ は漸近線である.

(i) $x \rightarrow \infty$ のとき

$$\text{漸近線の傾き } a = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x} \right) = 1$$

$$\text{切片 } b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} - x \right) = 1$$

よって, 求める漸近線の方程式は $y = x + 1$

(ii) $x \rightarrow -\infty$ のとき

$t = -x$ において漸近線の傾きは

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2 - t + 1}{t^2} \right) = 1$$

同様に $b = 1$ を得る.

以上より, 漸近線の方程式は $x \rightarrow 0$ のとき $x = 0$,

$x \rightarrow \pm\infty$ のとき $y = x + 1$ ■

ここで $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ より, 例えば $x \rightarrow \infty$ のときの漸近線の傾きは $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = 1$ としても求まる. また, $t \rightarrow -\infty$ のときの極限值は必ず $x = -t$ と置き換えて計算しよう.

この例は $y = x + 1 + \frac{1}{x}$ という形になるが, 漸近線を持つような曲線は,

$y = (\text{直線の式}) + (x \rightarrow \infty \text{ のときに } 0 \text{ になる部分})$

と表されることが多い. よって, 次のように解答することもできる.

別解 $y = x + 1 + \frac{1}{x}$ と表されることから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{y - (x + 1)\} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \{y - (x + 1)\} = 0$$

よって, 直線 $y = x + 1$ は $x \rightarrow \pm\infty$ のときこのグラフの漸近線となる. ■

また、漸近線を持つかどうかについては、第2次導関数を計算して増減表を正確にかいてもそれだけではわからない。そのため、分数関数などの「持つかどうか怪しい」関数に対してはチェックしておいた方がよい。

問題 48 次の曲線の漸近線の方程式を求めよ。

$$(1) y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$(2) y = \frac{x^3}{x^2-1}$$

例題 24 $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ が漸近線を持つかどうか調べ、持つときはその方程式を求めよ。

解) 定義域は $x^2 - 2x \geq 0$ より $x \leq 0, x \geq 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x}} = 1$$

また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x^2 - 2x} - x\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = -1 \text{ であるから,}$$

$x \rightarrow \infty$ のときの漸近線の方程式は

$$y = x - 1$$

同様に $x \rightarrow -\infty$ のときの漸近線の方程式は

$$y = -x + 1$$

$y = \sqrt{x^2 - 2x}$ を変形すると $(x-1)^2 - y^2 = 1$ となるが、これは双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を x 軸方向に 1 平行移動させたものである。数学Cで学ぶ知識から、この双曲線の漸近線は $(x-1)^2 - y^2 = 0$ を満たす直線であることがわかる。(※ p.51)

問題 49 $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ の漸近線の方程式を求めよ。

問題 50 $y = \sqrt{9x^2 + 2x + 4}$ の漸近線の方程式を求めよ。

漸近線を持つ関数

x 軸に平行でない漸近線を持つようなグラフは、主に分数関数と無理関数の形をしている。

なお、 $x \rightarrow \infty$ での傾きが求まっても、漸近線を持たないことがある。たとえば $y = \log x$ では $y' = \frac{1}{x}$ より $x \rightarrow \infty$ で $y' \rightarrow 0$ となる。ところが、傾き $a = 0$ として切片 b を求めてみると $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (\log x - 0) = \infty$ となり切片が求まらない。実際に $x \rightarrow \infty$ のとき $y = \log x$

の傾きは 0 になっていくが、いくらでも大きくなっていくので x 軸に平行な漸近線を持たない。

● 分数関数のグラフ

前節で述べたように、分数関数は漸近線を持つ可能性が高いが、単に増減表をかくだけでは漸近線そのものの情報は得られない。そのため、正確なグラフをかこうとすると第2次導関数を計算して増減表をかくだけでは足りないことがある。

グラフのかき方

1. 与えられた関数の定義域外となる点（グラフが切れるところ）を求める。これは分母が 0 となる点で、大抵 y 軸に平行な漸近線をもつ。
2. $x \rightarrow \pm\infty$ のときに漸近線をもつかどうか調べる。
3. 増減表をかき始めるとき、 x のところに 1. で求めた定義域外の値もかき込んでおく。
4. 増減表の欄外に、定義域外の点の左右における $f(x)$ の極限をかき加える。
5. 必要なら $x \rightarrow \pm\infty$ のときの $f(x)$ の値も調べておく。

例 16 $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ のグラフを、第2次導関数まで計算して丁寧に書いてみる。

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} \text{ とおく.}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, f''(x) = \frac{2}{x^3} \text{ である.}$$

$$f'(x) = 0 \text{ より } x = \pm 1$$

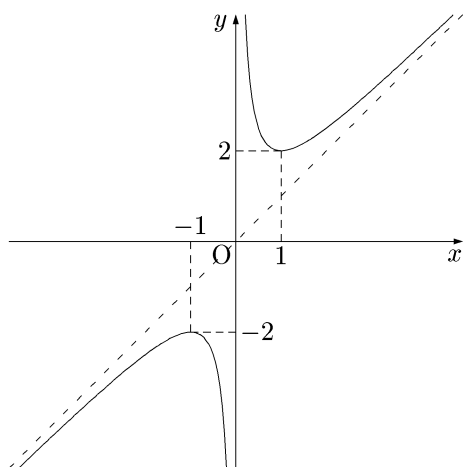
$$f''(x) = 0 \text{ となる } x \text{ はない.}$$

よって増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	0	...	1	...
y'	+	0	-	/	-	0	+
y''	-	-	-	/	+	+	+
y	↖	-2	↘	/	↘	2	↗

また $\lim_{x \rightarrow \infty} \{y - x\} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \{y - x\} = 0$ より、 $x \rightarrow \pm\infty$ のときこのグラフは直線 $y = x$ を漸近線にもつ。

よってグラフは次のようになる。



例 17 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ のグラフを、第 2 次導関数まで計算して丁寧にかいてみる。

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \text{ とおく.}$$

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} \text{ である.}$$

$$f'(x) = 0 \text{ より } x = \pm 1,$$

$$f''(x) = 0 \text{ より } x = 0, \pm\sqrt{3}.$$

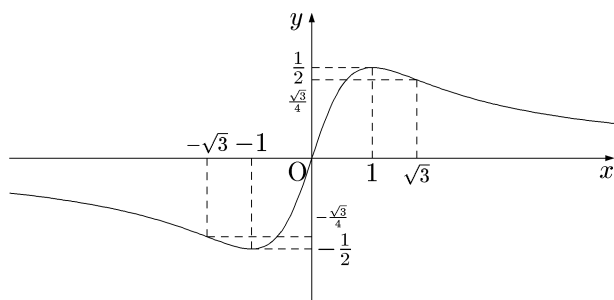
よって増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	変曲点	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	変曲点	$\searrow$

$f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}, f(\pm 1) = \pm\frac{1}{2}$ (複号同順) である。

また $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ より $x \rightarrow \pm\infty$ のとき x 軸を漸近線に持つ。

よってグラフは次のようになる。



この例のような場合、増減表の書き方の一例として $x \rightarrow \pm\infty$ を含めて以下のようにかくこともできる。

x	$-\infty$	$\cdots$	∞
y'		$\cdots$	
y''		$\cdots$	
y	0	$\cdots$	0

これならば $x \rightarrow \pm\infty$ のときの極限を別にかく必要がなくなる。

問題 51 次の関数のグラフをかけ。

$$(1) y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$(2) y = x + 1 + \frac{1}{x}$$

$$(3) y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$(4) y = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$$

$$(5) f(x) = \frac{x^3}{x - 1}$$

● 無理関数のグラフ

無理関数にも特徴がある。無理関数でもっとも簡単な例 $y = \sqrt{x}$ について調べてみる。グラフそれ自体は、 $y = x^2$ ($x \geq 0$) の逆関数であるため、容易にかくことができるのだが、念のため 2 次導関数まで求めて増減表を作ることにする。

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

これによると、もともとの定義域が $x \geq 0$ で、0 を含むのにも関わらず、 y', y'' は $x = 0$ において計算できない。しかしグラフそれ自体は点 $(0, 0)$ を通っているで、そこでの傾きなどについて何らかの情報が得られるはずである。実際、 $y = \sqrt{x}$ については

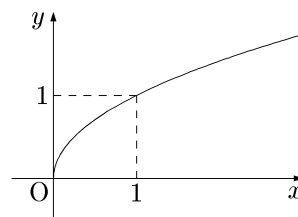
$$\lim_{x \rightarrow +0} y' = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

となることから、 $x = 0$ でのグラフの傾きが無限大であり、点 $(0, 0)$ においてグラフはまっすぐ上にのびていく、すなわち y 軸に接することになる。これは、関数 $y = x^2$ ($x \geq 0$) が直線 $y = 0$ (x 軸) に接するので、その逆関数 $y = \sqrt{x}$ も直線 $x = 0$ (y 軸) を接線に持つと考えるとわかりやすい。

また y'' が無限大という性質は特にグラフ上には現れないので、なにもいわなくてよい。

以上より、上で調べたことをまとめると、増減表およびグラフは次のようになる。

x	0	$\cdots$
y'	∞	$+$
y''		$-$
y	0	$\nearrow$



グラフのかき方

1. 与えられた無理関数の定義域を調べる. 特に $\sqrt{\quad}$ や $\sqrt[4]{\quad}$ などの偶数次の根の形であれば, 根号記号の中身が正.
2. 増減表で y' や y'' の値が発散するところは $\times$ をしておく. ($\pm\infty$ を書いてもよい.)
3. 欄外に y' の発散の仕方をかき加える.

例 18 $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ のグラフをかいてみよう.

定義域は $x^2 - 2x \geq 0$ より $x \leq 0, x \geq 2$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$y'' = \frac{(x-1)' \sqrt{x^2-2x} - (x-1)(\sqrt{x^2-2x})'}{x^2-2x}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-2x} - (x-1) \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}}{x^2-2x}$$

$$= \frac{(x^2-2x) - (x-1)(x-1)}{(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \frac{-1}{(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}} < 0$$

$y' = 0$ より $x = 1$ だが定義域の条件に適さない.

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow -0} y' = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = -\infty$$

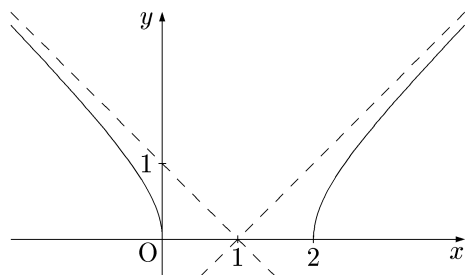
$$\lim_{x \rightarrow 2+0} y' = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = \infty$$

以上より増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	$-\infty$	$\nearrow$	∞	$+$
y''	$-$		$\nearrow$		$-$
y	$\searrow$	0	$\cdots$	0	$\nearrow$

また, 以前の例題より $x \rightarrow \infty$ のとき直線 $y = x - 1$ に漸近し, $x \rightarrow -\infty$ のとき直線 $y = -x + 1$ に漸近する. (㊟ p.49)

以上よりグラフは次のようになる.



例 19 $y = x^2 \sqrt{1-x}$ のグラフをかいてみよう.

定義域は $x \leq 1$

$$y' = 2x\sqrt{1-x} - x^2 \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{4x - 5x^2}{2\sqrt{1-x}}$$

$$y'' = \frac{(4x - 5x^2)' 2\sqrt{1-x} - (4x - 5x^2)(2\sqrt{1-x})'}{4(1-x)}$$

$$= \frac{(4 - 10x)2\sqrt{1-x} - (4x - 5x^2) \frac{-1}{\sqrt{1-x}}}{4(1-x)}$$

$$= \frac{2(4 - 10x)(1-x) + (4x - 5x^2)}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{15x^2 - 24x + 8}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$$y' = 0 \text{ より } x = 0, \frac{4}{5}$$

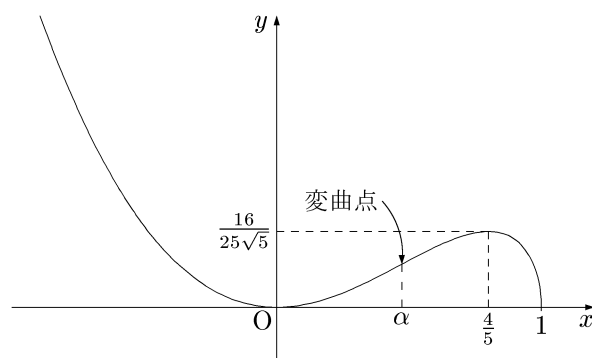
$$y'' = 0 \text{ より } x = \frac{12 \pm 2\sqrt{6}}{15}$$

$$x \leq 1 \text{ より } x = \frac{12 - 2\sqrt{6}}{15} \quad (\alpha \text{ とおく})$$

よって増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$	1
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-\infty$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$	$\frac{16}{25\sqrt{5}}$	$\searrow$	0

また $\lim_{x \rightarrow 1-0} y' = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{4x - 5x^2}{2\sqrt{1-x}} = -\infty$ であるから, $x \rightarrow 1-0$ のときにこのグラフは $x = 1$ に接する. 以上よりグラフは



となる.

この例のように, 無理関数では定義域の端点となるところでの傾きが $\pm\infty$ となることが多いので, 計算で確認するだけでなくグラフをかくときにも x 軸と垂直になるように気を付けること.

問題 52 次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = \sqrt{2x+1}$

(2) $y = \sqrt[3]{x^2+2}$

(3) $y = x\sqrt{4-x^2}$

(4) $y = \sqrt{x^3-x}$

● 三角関数のグラフ

三角関数のグラフにそれほど特別なことはないが、もともと周期関数なので周期的になることが多く、問題でも区間を指定することが多い。

三角関数で極値および変曲点を求めるときにもっとも注意しなければならないことは、値の正負をしっかりと把握することである。正負がわかりにくいときは、自分で表をかくなどして判断することをすすめる。次の例でみてみよう。

例 20 $y = \sin x \cos^3 x$ ($0 \leq x \leq \pi$) の凹凸を調べ、増減表を用いてグラフをかけ。

$$\begin{aligned} y' &= \cos x \cos^3 x + \sin x \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) \\ &= \cos^2 x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) \\ &= \cos^2 x (4 \cos^2 x - 3) \\ &= 4 \cos^2 x \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= (4 \cos^4 x - 3 \cos^2 x)' \\ &= 16 \cos^3 x (-\sin x) - 6 \cos x (-\sin x) \\ &= 2 \sin x \cos x (3 - 8 \cos^2 x) \end{aligned}$$

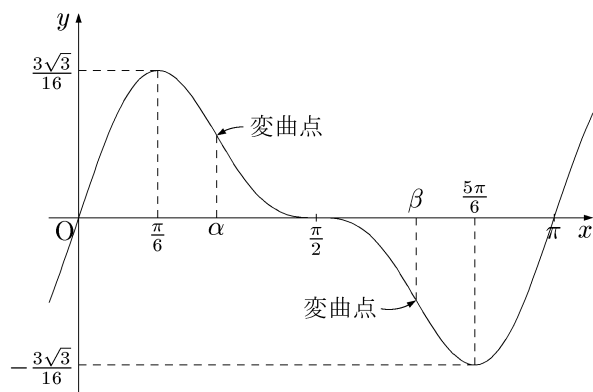
$$y' = 0 \text{ より } x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$y'' = 0 \text{ より } x = 0, \alpha, \frac{\pi}{2}, \beta, \pi$$

$$(\alpha, \beta \text{ は } \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}, \cos \beta = -\frac{\sqrt{6}}{4} \text{ となる数})$$

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
y'		+	0	-	-	-	0
y''		-	-	-	0	+	0
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	↘	変曲点	↘	変曲点

x	$\frac{\pi}{2}$	...	β	...	$\frac{5\pi}{6}$	...	π
y'	0	-	-	-	0	+	
y''	0	-	0	+	+	+	
y	変曲点	↘	変曲点	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{16}$	↗	0



問題 53 $y = (1 + \sin x) \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) の凹凸を調べ、増減表を用いてグラフをかけ。

● 指数関数のグラフ

指数関数の代表は $y = e^x$ である。 $y = e^x$ のグラフの特徴は $x \rightarrow -\infty$ のときに $y = 0$ へとすごい速さで収束していくことである。 $e \doteq 2.718$ として計算すると $e^{-5} = 0.0067$, $e^{-10} = 0.000045$ であり、普通にグラフをかくときにはほとんど x 軸上の点になる。

計算からも類推できるようにこのグラフは $x \rightarrow -\infty$ のとき $y = 0$ を漸近線に持つ。逆に $x \rightarrow \infty$ のときは ∞ へ発散する。このときグラフの傾きもどんどん大きくなっていくので、漸近線はない。

いずれにしても指数関数では $x \rightarrow \pm\infty$ での挙動を調べるのが大切だ。

グラフのかき方

- 与えられた指数関数が $x \rightarrow \pm\infty$ において収束するかどうか調べる。

例 21 $y = xe^{-x}$ の凹凸を調べ、増減表を用いてグラフをかけ。

$$y' = (1-x)e^{-x}, \quad y'' = (x-2)e^{-x} \text{ である。}$$

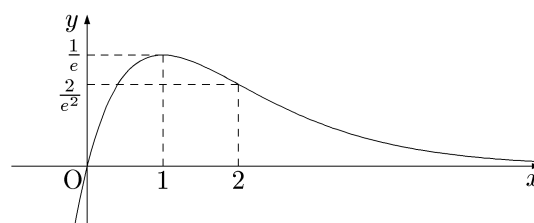
$$y' = 0 \text{ より } x = 1. \quad y'' = 0 \text{ より } x = 2.$$

よって増減表は次のようになる。

x	...	1	...	2	...
y'	+	0	-	-	-
y''	-	-	-	0	+
y	↗	$\frac{1}{e}$	↘	変曲点	↘

また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ より $x \rightarrow \infty$ のとき y は x 軸に漸近する。また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ である。

以上よりグラフは次のようになる。



例 22 $y = x^2 e^{-x}$ の凹凸を調べ、増減表を用いてグラフをかけ。

$$y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$$

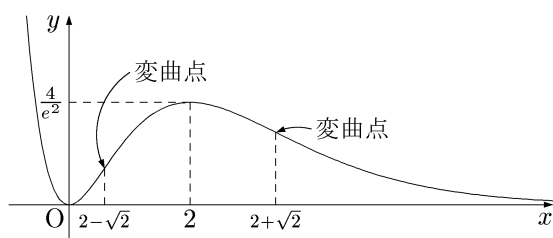
$$\begin{aligned}
 &= (2x - x^2)e^{-x} \\
 y'' &= (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} \\
 &= (x^2 - 4x + 2)e^{-x} \text{ である.}
 \end{aligned}$$

$$y' = 0 \text{ より } x = 0, 2. \quad y'' = 0 \text{ より } x = 2 \pm \sqrt{2}.$$

よって増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2 - \sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2 + \sqrt{2}$	$\cdots$
y'	-	0	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y		0		変曲点		$\frac{e^2}{4}$		変曲点	

また, $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$ であるから, グラフは次のようになる.



問題 54 次の関数のグラフをかけ.

- (1) $y = e^{-x^2}$
- (2) $y = e^x - x$
- (3) $y = e^x \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$
- (4) $y = x^3 e^{-x}$

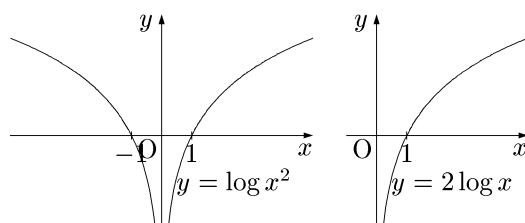
● 対数関数のグラフ

対数関数の代表は $y = \log_e x$ である. これは $y = e^x$ の逆関数で, $y = e^x$ は $x \rightarrow -\infty$ のときに $y = 0$ を漸近線に持っていた. x と y を入れ替えると $y \rightarrow -\infty$ のときに $x = 0$ となるが, $y = \log_e x$ の定義域に気を付けて考えれば $x \rightarrow +0$ のときに $y \rightarrow -\infty$ となる. よって $x = 0$ を漸近線に持つことがわかる.

また, 対数関数では問題で与えられている式に対して **真数条件**を必ずチェックすること.

例 23 関数 $y = \log x^2$, $y = 2 \log x$ のグラフをかくて比べる.

$y = \log x^2$ の定義域は $x \neq 0$ だが $y = 2 \log x$ の定義域は $x > 0$ である. よって, グラフはそれぞれ以下のようになる.



普通に計算すると $\log x^2 = 2 \log x$ となるのが当たり前のように思えるが, 左辺と右辺の真数条件を調べると全く違うことがわかる. グラフでみれば一目瞭然で, これらの変形に対しては注意を払わなければならないことが理解できよう.

— グラフのかき方 —

1. 対数を見たらまず真数条件をチェック. 定義域の端で y 軸に平行な漸近線があらわれることが多いことに注意.
2. 上で調べた極限の式を増減表の横にかき加える.

例 24 $y = \log(1 + x^3)$ の凹凸を調べ, 増減表を用いてグラフをかけ.

真数条件より $1 + x^3 > 0$. よって $x > -1$.

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{3x^2}{1 + x^3} \\
 y'' &= \frac{6x(1 + x^3) - 3x^2 \cdot 3x^2}{(1 + x^3)^2} \\
 &= \frac{3x(2 - x^3)}{(1 + x^3)^2} \text{ である.}
 \end{aligned}$$

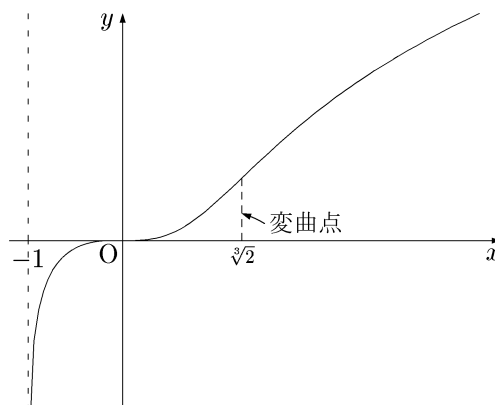
$$y' = 0 \text{ より } x = 0. \quad y'' = 0 \text{ より } x = 0, \sqrt[3]{2}.$$

$$\text{また, } \lim_{x \rightarrow -1+0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty.$$

よって増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{2}$	$\cdots$
y'		+	0	+	+	+
y''		-	0	+	0	-
y	$-\infty$		変曲点		変曲点	

よって, グラフは次のようになる.



問題 55 次の関数のグラフをかけ.

- (1) $y = \log(1+x) + \log(1-x)$
- (2) $y = (\log x)^2$
- (3) $y = \frac{x}{\log x}$
- (4) $y = x \log x$ (ただし $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$)

● 対称性

数学や物理においては、**対称性**について気をつけて考えないと見通しが立てやすいことが多い. グラフの対称性については既に学んでいるが、これを使うとグラフを効率よく理解できるので、ここで復習しておく.

$y = f(x)$ が $f(x) = f(-x)$ を満たすとき $f(x)$ のことを**偶関数**という. 偶関数は、 **y 軸対称**である.

$y = f(x)$ が $f(x) = -f(-x)$ を満たすとき $f(x)$ のことを**奇関数**という. 奇関数は、**原点对称**である.

例 25 代表的な偶関数は $y = x^2$, $y = x^4$, $y = \cos x$ などで、代表的な奇関数は $y = x$, $y = x^3$, $y = \sin x$ などである.

要するに x のところに $-x$ を代入したときに、関数の形が全く変わらなければ偶関数で、もとの関数とちょうど符号だけ異なるならば奇関数である. これは、グラフをかくときに気が付けば大変便利であるので、是非気が付いてほしい.

例 26 $y = \frac{1}{x^2+1}$, $y = e^{-x^2}$, $y = \sqrt{4-x^2}$ は全て偶関数であるので、 **y 軸対称**である.

例 27 $y = x + \frac{1}{x}$, $y = \frac{x}{x^2+1}$, $y = x\sqrt{4-x^2}$ は全て奇関数であるので、**原点对称**である.

例 28 $y = xe^{-x}$, $y = \sqrt{x^3-x}$ は偶関数でも奇関数でもない.

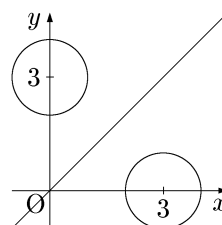
また、陰関数の場合では、 y のところに $-y$ を代入したときに、関数の形が全く変わらない場合は、その関数が表す図形は **x 軸対称**になる.

例 29 $x^2 + y^2 = 1$ は y に $-y$ を代入しても式の形が同じであるから **x 軸対称**である. (x に $-x$ を代入しても式の形が同じであるから **y 軸対称**でもある.)

陰関数の場合に、もう一つ逆関数の考え方をを用いてグラフの対称性をみる方法がある.

逆関数とは x と y を入れ替えて作るもので、もとの関数と逆関数は直線 $y = x$ に関して対称であるという性質があった. 陰関数で表されている関数において x と y を入れ替えてももとの関数の逆関数が与えられているとみなすと、 $y = x$ に関して対称に移動しているはずである.

例えば $(x-3)^2 + y^2 = 1$ は $(3, 0)$ 中心の単位円 (半径が 1 の円) である. この式の x と y を入れ替えると $(y-3)^2 + x^2 = 1$ となるが、これは $(0, 3)$ 中心の単位円であり、もとの円とは



$y = x$ に関して対称であることがわかる.

よって、陰関数で表された関数について、 x と y を入れ替えてももとの関数と同じ形をしている場合、その関数で表された図形は $y = x$ に関して対称である.

例 30 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ は x と y を入れ替えても式の形が同じであるから $y = x$ に関して対称である.

問題 56 次の式で表された関数や図形がどのような対称性をもつか答えよ.

- (1) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$
- (2) $y = \log|x|$
- (3) $x^2 + xy + y^2 = 5$
- (4) $y^2 = x^3$

最後に x 軸に垂直な直線に関して対称な図形の方程式について考えてみる.

つまり、関数 $y = f(x)$ のグラフを $x = k$ に関して対称移動してみよう.

$y = f(x)$ を y 軸、すなわち $x = 0$ に関して対称移動させるには、 x を $-x$ に置き換えればよかった. そこで、 $x = k$ を y 軸 ($x = 0$) にするために、 x 軸方向に $-k$ 平行移動させ、そこで y 軸対称に移動させてから再び x 軸方向に k 平行移動させればよい. 実際には次のような手順になる.

$$y = f(x+k) \quad (x \text{ 軸方向に } -k \text{ 平行移動})$$

$$y = f(-x+k) \quad (y \text{ 軸対称移動})$$

$$y = f(-(x-k)+k) \quad (x \text{ 軸方向に } k \text{ 平行移動})$$

$$y = f(2k-x)$$

よって、 $y = f(x)$ で表されるグラフを $x = k$ に関して対称移動させたグラフを表す関数は $y = f(2k-x)$ である.

例 31 $y = f(x) = (x-1)^2$ のグラフを $x = 4$ に関して対称移動させた式は、

$y = f(2 \cdot 4 - x) = (8 - x - 1)^2 = (x - 7)^2$ となるが、実際に頂点が $(1, 0)$ から $(7, 0)$ へと $x = 4$ を対称に移動している。

コンピュータを利用してグラフの形を理解する方法もある。計算力をつけるためにはコンピュータを利用することばかりを勧められないのだが、理解の助けにするために用いる分にはよいだろう。

フリーソフトでは GRAPES というソフトと Function View というソフトが有名である。いずれも似たような操作でグラフを描画してくれるので、試してみるとよい。 $y = \dots$ で表される関数のことを、陰関数と対比して**陽関数**というが、これらのソフトでは陽関数ばかりでなく陰関数や媒介変数表示、極座標表示など大学初年度レベルのグラフまで描画することが可能である。是非試してみてほしい。

3.6 物理的思考

微分とは、ごく短い時間の平均変化量を出し、それを用いて計算によってある瞬間の平均変化量を導き出す操作であった。これを、ある物体の位置の時間による変化として捉えると物理における力学の考え方につながる。

● 1次元の運動

数学では1次元は数直線として表される。

数直線上を移動する点 P の時刻 t における位置を x で表すと、時刻に対して位置が定まるため、 x は t の関数になる。

これを $x = f(t)$ と表す。

ごく短い時間の平均速度を出し、そこからある瞬間の速度を計算するというを以前にもやったように、 $f(t)$ を t で微分すれば速度が得られる。すなわち、時刻 t における速度は

$$f'(t) \quad \left(\text{正確には } \frac{dx}{dt} \right)$$

で表される。

物理ではベクトルとしての量を**速度**といい、大きさと方向の2つの情報を含んで考える。よって、数直線上の運動において速度を考えるときは x 軸の正の向きと同じ方向か否か、つまり正か負かをはっきり区別しなければならない。

次に、速度を微分してみよう。ある時刻に速度 $10(\text{m/s})$ で、5秒後に $20(\text{m/s})$ となったとする。この5秒間の速度の平均変化量は、 $10(\text{m/s})$ を $5(\text{s})$ で割ることで得られる。単位に気を付けて考えると平均変化量は $2(\text{m/s}^2)$ となり、加速度が得られていることに気が付くだろう。加速度とは、速度の単位時間あたりの変化量のことであることを思い出しておこう。

このようにして速度のある時刻における瞬間の平均変化量を考えることができる。これは、その時刻における**加速度**を表す。すなわち、時刻 t における加速度は

$$f''(t) \quad \left(\text{正確には } \frac{d^2x}{dt^2} \right)$$

で表される。

例 32 物理で学んだように、初速度 v_0 、一定の加速度 a で出発した物体の t 秒後の位置は

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{となる。これを } t \text{ で微分すると}$$

$\frac{dx}{dt} = v_0 + at$ となり、これは t 秒後の速度を表す。さらに t で微分すると $\frac{d^2x}{dt^2} = a$ より加速度が得られた。

例 33 原点を出発して数直線上を動く点 P の t 秒後の位置が $x = t^3 - 4t^2 + 5t$ で表される物体の、 t 秒後の速度 v と加速度 a は、

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3t^2 - 8t + 5 \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= 6t - 8\end{aligned}$$

となる。

問題 57 原点を出発して数直線上を動く点 P の t 秒後の位置が $x = 3t^3 - 7t^2 + 4t$ で表される物体について

- (1) 再び原点を通る時刻を全て求めよ。
- (2) 上で求めた時刻における速度を求めよ。
- (3) 上で求めた時刻における加速度を求めよ。

● 2次元の運動

数学では2次元は座標平面上の点として表される。場合によっては複素平面上の複素数として表して考えた方が分かり易いこともあるが、ここでは扱わない。

座標平面上を移動する点 P の時刻 t における位置は t の関数として表される。 x 座標と y 座標が t の関数として表されるため、**媒介変数表示**の関数となる。また、速度や加速度が大きさや方向の2つの情報を含んでいることから、平面上の運動においてはベクトルで表されることに注意しておく。

$x = f(t)$, $y = g(t)$ と表されるとき、時刻 t における速度は

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

と表され、加速度も同様に

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right)$$

と表される。

例 34 $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ は原点中心の単位円周上を動く点を表す。

速度は $(-\sin t, \cos t)$ で大きさは1である。

加速度は $(-\cos t, -\sin t)$ で大きさは1である。

問題 58 原点中心の単位円周上を動く点の時刻 t における座標が

$(x, y) = (\cos 2t, \sin 2t)$ で表されるとき

- (1) 時刻 t における速度と加速度、またその大きさを求めよ。
- (2) 時刻 t における速度が円に接する方向であることを確認せよ。
- (3) 時刻 t における加速度が円の中心方向を向いていることを確認せよ。

● さまざまな量の変化率

もともと微分積分という概念は、物体の運動の単位時間あたりの変化量を探究していたことから考案された。微分概念を使えば、さまざまな量の単位時間あたりの変化量を考えることができる。

例題 25 1辺10mの正方形の各辺が、1秒につき5cmずつ増えていくとする。1辺の長さが20mになったとき、面積は1秒あたり何 m^2 増えていくか。

解) t 秒後の面積は $S = (10 + 0.05t)^2$ (m^2) である。

t 秒後の瞬間における面積の変化率は、 $\frac{dS}{dt}$ であるから、

$$\frac{dS}{dt} = 2 \cdot 0.05(10 + 0.05t) \text{ となる。}$$

1辺の長さが20mになるのは $t = 200$ のときであるから、求める値は

$$2 \cdot 0.05(10 + 0.05 \cdot 200) = 2 \text{ (m}^2\text{)} \quad \blacksquare$$

答の単位は、正確には単位時間あたりの面積の変化量であるから (m^2/s) となる。

物理的な考え方をすると、**単位時間あたり**などという言葉が出てくる。物理では時間を秒単位で考えるのが標準であるから、単位時間あたりとは1秒間のことになるが、微分が瞬間のことを考えるのに対して、1秒間あたりという表現は見当はずれのようにも感じる。これは、グラフと接線で考えてみるとよい。

微分してある瞬間の傾きがわかったとき、その傾きが7であったとする。この傾き7という量は、 x 方向に1進んだとき、それに比例して y が7増えるという割合のことを表す。当然2増えれば14増え、3増えれば21増える。 x 方向の単位あたりどれだけ y が増えるかは、まさにこの割合、比例定数のことであり、それは x 方向に1増えたときにそれに対応して増える y の量と一致する。よって、この場合は x 方向の単位あたり、 y は7増加(変化)するといえる。

数学小話

微分積分は, Isaac Newton(アイザック・ニュートン 1642–1727) と Gottfried Wilhelm Leibniz(ゴットフリート・ヴィルヘルム・ライプニッツ 1646–1716) らがそれぞれ独立に考案したといわれている.

ニュートンが微分積分学を世に発表したのはライプニッツの後であったが, 発見したのは自分が先だと主張して20年以上に渡って発見の優先順位闘争が繰り広げられた.

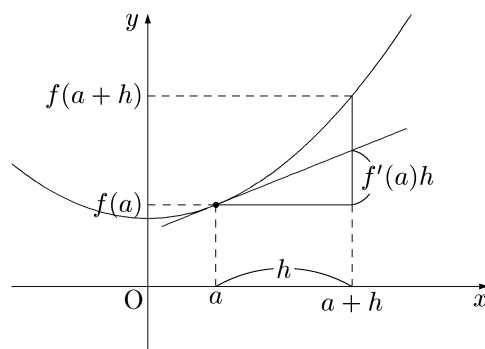
現在使われている微分積分の記号はライプニッツが考案したものが元になっているが, これらの記号無くして現代の数学の発展は無かったといわれるほど重要である.

3.7 近似式

● 1 次式近似

関数 $y = f(x)$ の $x = a$ 付近における値を, 1 次式で近似することを考える.

一般のグラフは曲がった形になっている. 1 次式とは直線を表す方程式であるから, **1 次式近似**とは曲がっているグラフのある点付近の値を, 直線を用いて近似計算するという考え方である.



図で説明しよう.

$x = a$ から $x = a + h$ までの間, 実際には y の値は $f(a + h) - f(a)$ だけ増加している. しかし, $x = a$ の瞬間に, グラフから接線へ切り替わったと考えると, 単位あたりの増加率が $f'(a)$ のまま固定される. すると, x が h 進む間に $f'(a)h$ だけ増加することになる. x が進めば進むほど本来増加した量との誤差は広がっていくが, $x = a$ に近いところではよく一致しているといえよう.

図より, $f(a + h) \doteq f(a) + f'(a)h$ となる.

また, 微分係数の定義式を思い出してみると,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

であった. ここで, 十分に h が小さいときは,

$$f'(a) \doteq \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

と考えることができる. よって

$$f(a + h) \doteq f(a) + f'(a)h$$

が導き出される.

1 次近似式

$h \doteq 0$ のとき, $x = a$ の近くでの $f(x)$ の近似値は

$$f(a + h) \doteq f(a) + f'(a)h$$

と表される. 特に

$$f(h) \doteq f(0) + f'(0)h$$

である.

例 35 $f(x) = \sqrt{x}$ のとき, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ であるから,

$$f(1+h) \doteq f(1) + f'(1)h = 1 + \frac{1}{2}h \text{ となる.}$$

実際, $x = 1.01$ のとき $\sqrt{x} = 1.00498756 \dots$ だが, この値は $h = 0.01$ として計算とした

$$f(1+h) \doteq 1 + \frac{1}{2}h = 1.005 \text{ とよく一致している.}$$

問題 59 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ の $x = 1$ 付近における 1 次近似式を導き, $\sqrt[3]{1.01}$ の近似値を計算せよ.

問題 60 $f(x) = \log(1+x)$ の $x = 0$ 付近における 1 次近似式を導き, $\log 1.05$ の近似値を計算せよ.

1 次近似式

結局, $f(x)$ の $x = a$ 付近における 1 次近似式とは, $y = f(x)$ の $x = a$ における接線の方程式のことである.

● マクローリン展開

$f(x) = x^5 - x^4 + 7x^3 + 5x + 2$ という 5 次式について, 微分を繰り返して見て, $x = 0$ における値を計算してみよう.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - x^4 + 7x^3 + 5x + 2 \text{ より} & f(0) &= 2 \\ f'(x) &= 5x^4 - 4x^3 + 21x^2 + 5 \text{ より} & f'(0) &= 5 \\ f''(x) &= 20x^3 - 12x^2 + 42x \text{ より} & f''(0) &= 0 \\ f^{(3)}(x) &= 60x^2 - 24x + 42 \text{ より} & f^{(3)}(0) &= 42 \\ f^{(4)}(x) &= 120x - 24 \text{ より} & f^{(4)}(0) &= -24 \\ f^{(5)}(x) &= 120 \text{ より} & f^{(5)}(0) &= 120 \\ f^{(6)}(x) &= 0 \text{ より} & f^{(6)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

第 3 次導関数以降は, n 回微分した第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表した. これ以上微分してもずっと 0 が続くだけだから省略する. 右式のように $x = 0$ を代入すると定数項しか残らないので定数項に着目しよう.

$f^{(3)}(0) = 42$ の 42 は, 元の式の 3 次の係数 7 に, 微分していくときの 3, 2, 1 がかけられてできた数字である. 同様に, $f^{(5)}(0) = 120$ の 120 も, 元の式の 5 次の係数 1 に, 微分していくときの 5, 4, 3, 2, 1 がかけられてできた数字である.

つまり, 上の式において, $f^{(n)}(0)$ は, 元の式の n 次の係数に $n!$ をかけた数字であることがわかる. よって, 元の式 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

$$+ \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(0)}(0)}{0!}$$

とも表されることを確認しよう. ここで, $0! = 1$ で $f^{(0)}(0)$ は微分していないと考えて $f(0)$ のことであるとする.

多項式の展開公式

n 次の多項式について, 次の式が成り立つ.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

多項式について上記の式が成り立つことは例を見れば明らかであるが, 多項式以外でこの式が成り立つのだろうか.

$f(x) = e^x$ で考えてみよう.

e^x は何回微分しても e^x のままであるから, $f^{(n)}(x) = e^x$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) である. よって, $f^{(n)}(0) = 1$.

多項式であれば, 何回か微分を続けると途中からずっと 0 になるが, e^x ではそうはならない. なので, 多項式のときから類推すると

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \dots$$

と足し続けていけばよいことになる. よって,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

と表される. この無限級数が収束するかどうかであるが, 実は e^x の場合は収束して全ての实数 x について等号が成り立つことが知られている.

何回でも微分できる関数としては, 他に $\sin x$, $\cos x$ があるが,

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \end{aligned}$$

が全ての实数 x について成り立つ.

これらの展開式を**マクローリン展開** (Maclaurin 展開) と呼ぶ. より一般にテイラー展開 (Taylor 展開) というものもある.

他に

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (|x| < 1) \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

が有名であるが, 最後の 2 つは実数全体では成り立た

ない.

問題 61 $\sin x$, $\cos x$ の展開式が正しいことを確認せよ.

以降は余談であるが, e^x の展開式に ix (i は虚数単位) を代入すると,

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + i\frac{x^9}{9!} - \cdots$$

となるが, この右辺は $\cos x + i \sin x$ という形をしている.

よって, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ という式が成り立ち, x に π を代入したときに $e^{i\pi} = -1$ という **オイラーの等式** (Euler's identity) として知られる等式が得られる. e , π という全く異なるところから定義される定数が, 指数関数・三角関数と虚数単位 i を通じて数字の単位である 1 と結びつく予想外の調和は, 数学上最も美しいともいわれる.

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ に $\alpha + \beta$ を代入すると,

$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta)$ であるが, 指数法則を用いて計算すると

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{i\alpha} e^{i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

となり, 実部と虚部を比べると加法定理の証明となっている.

問題 62 $e^{i(\alpha-\beta)}$ でも確認せよ.

A. 卷末問題

● 1 章

1 2 曲線 $y = x^2 + 1$ と $y = -x^2 + 2x + 5$ で囲まれた図形を x 軸まわりに回転させた立体の体積を求めよ.

2 曲線 $y = x^2 - 4$ と直線 $y = 3x$ とで囲まれた図形について

- (1) x 軸まわりに回転した立体の体積を求めよ.
- (2) y 軸まわりに回転した立体の体積を求めよ.

3 $y = x^2 - 3x$ と $y = x$ とで囲まれた図形について

- (1) x 軸まわりに回転した立体の体積を求めよ.
- (2) y 軸まわりに回転した立体の体積を求めよ.

4 xy 平面上に 5 点

$A(0, 2), B(2, 2), C(2, 1), D(4, 1), P(0, 3)$ をとる. 点 P を通り傾き a の直線 ℓ が, 線分 BC と交わり, その交点は B, C と異なるとする. このとき次の問いに答えよ. 【08・神戸大-理系・改】

- (1) a の値の範囲を求めよ.
- (2) 直線 ℓ と線分 AB , 線分 BC で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1 , 直線 ℓ と線分 BC , 線分 CD で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を V_2 とするとき, それらの和 $V = V_1 + V_2$ を a の式で表せ.

● 2 章

5 $y = kx$ が $y = \frac{x-3}{x-1}$ と共有点をただ 1 つしか持たないときの k の値を求めよ.

6 $y = \sqrt{2x-4}$ と $y = kx+1$ がただ 1 つの共有点を持つように定数 k の値を定めよ. また, その共有点の座標を求めよ.

7 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{a + \cos x} - b}{(x - \pi)^2} = \frac{1}{4}$ が成り立つとき, 定数 a, b の値を求めよ.

8 等式 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{ax+b}{\cos x} = 1$ が成り立つとき, 定数 a, b の値を求めよ. 【98・岡山理大-総合情報】

9 半径 1 の円に内接する正 n 角形の周の長さ L_n を求め, $n \rightarrow \infty$ のときの極限を求めよ.

10 座標平面上で, 動点 P は原点を出発して x 軸正の向きに 1 だけ進み, 進行方向左に 120° 回転して $\frac{1}{2}$ 進む. さらに, 左に 120° 回転して $\frac{1}{4}$ 進む. さらに, 左に 120° 回転して $\frac{1}{8}$ 進む. 以下, このような運動を限りなく続けるとき, 点 P の極限の位置を求めよ.

11 一辺の長さ a ($0 < a < 1$) の立方体 C_1 がある. その上に, はみ出さないように一辺の長さ a^2 の立方体 C_2 を乗せる. さらにその上に, はみ出さないように一辺の長さ a^3 の立方体 C_3 を乗せるというように, 無限に立方体を重ねて作る立体を C とおく.

- (1) C の高さが 2 を超えるような a の範囲を答えよ.
- (2) C の表面積を a の式で表せ.

12 次の関数のグラフをかいて, 関数が不連続である点の x 座標を求めよ.

- (1) $y = x[x] \quad (-1 \leq x \leq 3)$
- (2) $y = [2 \cos x] \quad (0 \leq x \leq \pi)$

● 3 章

13 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \{\log(4x^2 + 1) - 2 \log x - \log 4\}$ を求めよ. 【91・工学院大】

14 $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ を微分して第 2 次導関数を求めよ.

15 方程式 $e^x = 4x$ が $0 < x < 3$ の間に異なる実数解を少なくとも 2 つ持つことを示せ. ただし $\frac{5}{2} < e < 3$ とする.

16 $y = \frac{\sin x}{2 - \cos 2x} \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ の最大値・最小値を求めよ.

17 関数 $f(x) = a^x x^a \quad (x > 0)$ は x がどんな値のとき最大となるか. ただし, a は定数で, $0 < a < 1$ とする.

18 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$ 上に点 $P(a, b)$ がある.

【07・愛知教育大】

(1) 点 P における接線の傾きを求め、接線の方程式を求めよ.

(2) (1) で求めた接線と x 軸との交点を A , y 軸の交点を B とおく. このとき $OA + OB$ の長さが一定であることを示せ.

19

(1) a を実数とする. 曲線 $y = ae^{-x}$ 上の点 P において法線を引いたとき、その法線が原点を通るような P がただ 1 つ定まることを示せ.

(2) a が実数全体を動くとき、(1) で定まる点 P の軌跡を求めよ.

【98・京都工繊大】

20 xy 平面において、曲線 $C: y = x - \log x$ ($0 < x < 1$) と C 上の点 P を考える. P における C の接線と y 軸との交点を Q とし、 P における C の法線と y 軸との交点を R とする. 点 P が C 上を動くとき、線分 QR の長さの最小値を求めよ.

【06・京都工繊大】

21 $x > 0$ の範囲で定義された関数 $f(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^{\log x}$ について、次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ.

(2) 曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べ、変曲点の座標を求めよ.

(3) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ を調べ、曲線 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

【98・名古屋市大-薬】

22 関数 $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ に対し、次の問いに答えよ.

【97・大阪女子大】

(1) $t = \sin x + \cos x$ とおくとき、 $f(x)$ を t を用いて表せ.

(2) $f(x)$ の区間 $0 \leq x \leq \pi$ における最大値と最小値を求めよ. またそのときの x の値を求めよ.

23 k を定数とする. 方程式 $x = \log(x-k)^2$ の異なる実数解の個数を求めよ. ただし、必要なら $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = 0$ であることを用いてもよい.

【00・関西大-工】

24 a は正の定数とする. 方程式 $x + \sqrt{x^2 - 1} = ax^2$ の異なる実数解の個数を調べよ.

【95・旭川医科大】

25 a を定数とすると、方程式 $e^{-\frac{1}{4}x^2} = a(x-3)$ の異なる実数解の個数を、 a の値で場合分けして調べよ.

26 a を実数とする. xy 平面の 2 曲線 $y = ax^2$ と $y = (x^2 + 1)e^x$ がただ 1 つの共有点をもつような a の範囲を求めよ.

27 自然数 n に対し、方程式

$$\frac{1}{x^n} - \log x - \frac{1}{e} = 0$$

を考える. ただし、対数は自然対数であり、 e はその底とする.

【07・東北大】

(1) 上の方程式は $x \geq 1$ にただ一つの解をもつことを示せ.

(2) (1) の解を x_n とする. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ を示せ.

28 e を自然対数の底とし、座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) が $x = e^{-2t} \cos t$, $y = e^{-2t} \sin t$ であるとする.

(1) 点 P の時刻 t における速度を求めよ.

(2) 点 P が時刻 $t = 0$ から時刻 $t = u$ ($u > 0$) の間に移動する道のり $L(u)$ を求めよ.

(3) 極限値 $\lim_{u \rightarrow \infty} L(u)$ を求めよ.

【99・大分大-工】

29 曲線 $y = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ (x-1)^2 & (1 < x \leq 4) \end{cases}$ を y 軸の周りに回転してできる容器に単位時間あたり a の水を注ぐ. 容器内の水の高さが 4 になったとき

(1) 水の量を求めよ.

(2) 水面の上昇速度を求めよ.

【99・工学院大】

索引

1 次式近似, 57
1 対 1, 11
陰関数, 33
陰関数の微分, 34

上に凸, 46

オイラーの等式, 59

開区間, 28
解析関数, 9
回転体, 6
ガウス記号, 28
加速度, 55
かつらむき型積分, 8

奇関数, 54
逆関数, 9
共通接線, 41

偶関数, 54
区間, 28

原点对称, 54

高次導関数, 34
合成関数, 3

自然対数, 36
自然対数の底, 36
下に凸, 46
収束する, 14
真数条件, 53
振動する, 15

整関数, 9
漸近する, 43, 47
漸近線, 13, 47

速度, 55

第 n 次導関数, 34
対称性, 54
対数微分法, 39
第 2 次導関数, 34, 46
楕円, 40
単位時間あたり, 56

値域, 9
中間値の定理, 28
直交双曲線, 12

定義域, 9

導関数, 30
動点, 39

媒介変数, 39
媒介変数表示, 39, 56
バウムクーヘン型積分, 8
はさみうちの原理, 18
発散する, 14–16, 23

左からの極限, 23
微分可能, 30
微分係数, 30

不定形, 17
負の方向に無限に大きくなる, 16
部分和, 20
不連続である, 27
分子を有理化する, 17
分数関数, 12
分数式, 12

平均値の定理, 42
平均変化量, 42
閉区間, 28
変曲点, 46

法線, 40

マクローリン展開, 58

右からの極限, 23

無限級数, 20
無限等比級数, 21
無理関数, 11

陽関数, 55

連続関数, 27
連続である, 27

y 軸対称, 54