問題の答え

1章解答

1 $(f \circ g)(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$, $(g \circ f)(x) = 4x^4 - 1$

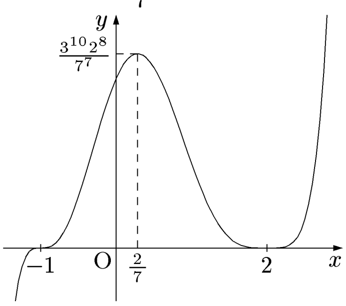
2

(1) $y' = 8(2x+3)^3$　(2) $y' = -5(1-x)^4$

(3) $y' = 6x(x^2+1)^2$　(4) $y' = 2(2x+1)(x^2+x+1)$

3 原始関数の 1 つを $F(x)$ とおくと $F'(x) = f(x)$.（左辺）$= (F(x) - F(-x))' = F'(x) - F'(-x) \cdot (-1) = f(x) + f(-x)$ より示された.

4 $x = -1,\ \dfrac{2}{7},\ 2$ で $y' = 0$ となる.



5

(1) $x = 0,\ \pm 1$

(2) $x = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 3$

(3) $x = \pm 1,\ \pm 2,\ -\dfrac{8}{5}$

6 $(uvw)' = (uv)'w + (uv)w' = (u'vw + uv')w + (uv)w'$ より示された.

$f'(x) = 2(x-2)(x-3)^2(3x^2 - 11x + 9)$

7 $\dfrac{512}{15}\pi$

8 $\dfrac{1296}{5}\pi$

9 $\dfrac{384}{5}\pi$

10 $\dfrac{149}{6}\pi$

11 $\dfrac{122}{27}\pi$

12 $\dfrac{15}{2}\pi$

13 $\dfrac{8}{3}\pi$

14 バウムクーヘン型積分で考えよう. $V = 27\pi$

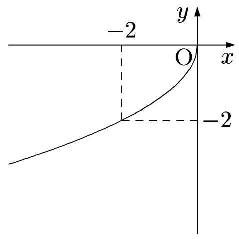
2章解答

1 $y = \dfrac{1}{5}x - \dfrac{3}{5}$ $(-7 < x < 18)$

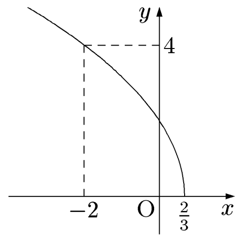
2 $y = \sqrt[n]{x}$ $(0 \leqq x)$

3

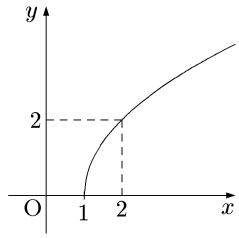
(1)



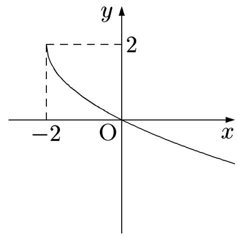
(2)



(3)



(4)



4 $y = \sqrt{a\left(x + \dfrac{b}{a}\right)}$ より x 軸方向に $-\dfrac{b}{a}$ だけ平行移動させたもの.

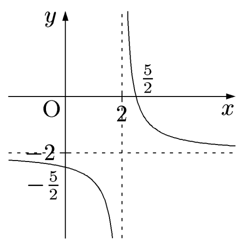
5

(1) $x = 5$　(2) $1 \leqq x \leqq 5$

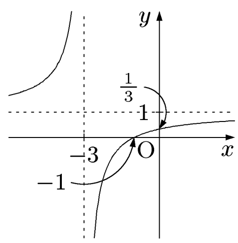
6 接するときの条件から $k = \dfrac{1}{2}$. また, グラフより $k = 0$. 以上より $k = 0,\ \dfrac{1}{2}$

7

(1)

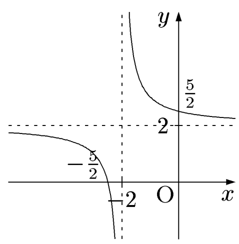


(2)

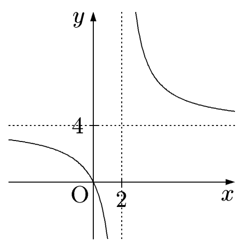


8

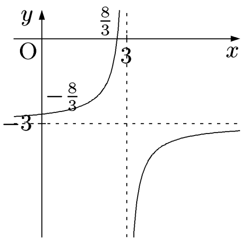
(1)



(2)



(3)



9 $b \fallingdotseq 0$ かつ $c \fallingdotseq 0$ としてよい．

$b=0$ のときは直線．$ad-bc=0$ のとき定数関数．それ以外のときは $k=b-\dfrac{ad}{c}$ とおいて $y=\dfrac{k}{cx}$ を x 軸方向に $-\dfrac{d}{c}$，y 軸方向に $\dfrac{a}{c}$ だけ平行移動させたもの．

10

(1) ∞ に発散　(2) $-\infty$ に発散　(3) $\pm\infty$ で振動
(4) 0 に収束　(5) 0 に収束　(6) ∞ に発散　(7) 4 に収束
(8) 5 に収束　(9) 2 に収束

11

(1) ∞　(2) 0　(3) -1

12 略

13 $\dfrac{3}{4}$

14

(1) ∞　(2) ∞　(3) 不定形　(4) 0　(5) 不定形
(6) $-\infty$　(7) 0　(8) $\pm\infty$ のいずれか　(9) 0　(10) ∞
(11) 不定形 (12) $\pm\infty$ のいずれか

15 0

16

(1) 0
(2) ∞ に発散
(3) 発散（$\pm\infty$ で振動）

17

(1) 0　(2) 5　(3) $-\dfrac{1}{3}$

18 5

19

(1) $\dfrac{5}{12}$ に収束

(2) ∞ に発散（分母の有理化をすると $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ となる）

20 $\dfrac{1}{4}$

21

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty$ より発散する
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ より発散する

22

(1) $\dfrac{16}{3}$ に収束する　(2) 発散する（振動する）
(3) 81 に収束する　(4) ∞ に発散する

23

(1) $\dfrac{4}{9}$　(2) $\dfrac{117}{110}$　(3) $\dfrac{5}{13}$

24

(1) $\dfrac{1}{6}$　(2) $-\dfrac{3}{4}$

25

(1) 3　(2) ∞　(3) 5　(4) $-\infty$　(5) $\dfrac{1}{3}$　(6) $\sqrt{2}$

26

(1) $-\infty$　(2) ∞　(3) 4　(4) -4　(5) ∞　(6) $-\infty$

27

(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $-\dfrac{1}{2}$　(3) 1　(4) 1

28

(1) $a=-3,\ b=-2$
(2) $a=-2,\ b=22$
(3) $a=-\dfrac{15}{16},\ b=-\dfrac{1}{4}$ （条件に $a \geqq -1,\ b \leqq 0$ が付くことに注意）

29

(1) 0　(2) 1　(3) ∞　(4) 0　(5) ∞　(6) ∞
(7) $-\infty$　(8) $-\infty$

30 $-\infty$

31

(1) $\dfrac{5}{4}$　(2) 0　(3) 2　(4) 1　(5) 2

32

(1) ∞　(2) 0　(3) $-\infty$　(4) 不定形　(5) 振動する
(6) 振動する　(7) 0　(8) 不定形　(9) ∞　(10) 不定形
(11) 不定形 (12) 不定形

厳密な答は上記のようになるが，受験数学では $0^0=1$ や $\infty^0=1$ と考えることが多い．例えば $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^x=1$ など．計算するときの指数部の影響が強いことが反映されている．

33 グラフは省略する．

(1) $x=\dfrac{1}{2}$　(2) $x=\dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ 2\pi$
(3) $x=1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2$

34

(1) 左辺を $f(x)$ とおく．$f(2)=2,\ f(3)=-4$ より示せた．
(2) $f(-\pi)=-\pi-1<0,\ f(\pi)=\pi-1>0$ より示せた．
(3) $f(\frac{\pi}{2})=2^{\frac{\pi}{2}}+1>0$ である．$f(-\frac{\pi}{2})=2^{-\frac{\pi}{2}}-1$ において $\frac{\pi}{2}>1$ より $2^{-\frac{\pi}{2}}<2^{-1}$．よって $f(-\frac{\pi}{2})<0$ となり，示せた．

3章解答

1 前述の例が解答となる.

2

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)-1}-\sqrt{2x-1}}{h}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=-\frac{1}{x^2}$

3

(1) $(x+3)^2(x-2)^3(7x+6)$

(2) $4(3x^2-x)^3(6x-1)$

(3) $6x^5(x^2-1)^2(x^2+1)^2(3x^4-1)$

(4) $3(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2(3x^2+12x+11)$

4 $\displaystyle\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}=\frac{g(x)-g(x+h)}{hg(x)g(x+h)}$ で

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h}=-g'(x)$ より

$\displaystyle y'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

5

(1) $-\dfrac{5}{x^6}$ (2) $-\dfrac{1}{(x+3)^2}$ (3) $-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

(4) $-\dfrac{6x}{(x^2+1)^4}$

6 略

7

(1) $\dfrac{x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}$ (2) $\dfrac{x^2+6x+13}{(x+3)^2}$

8 $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

9 $\displaystyle\left((x^{\frac{1}{p}})^q\right)'=q(x^{\frac{1}{p}})^{q-1}\cdot\frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}$

$\displaystyle=\frac{q}{p}x^{\frac{q}{p}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}-1}=\frac{q}{p}x^{\frac{q}{p}-1}$

10 $y=\sqrt{1-x^2}$ のとき $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

よって $y'=-\dfrac{x}{y}$.

$y=-\sqrt{1-x^2}$ のとき $y'=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

よって $y'=\dfrac{x}{-y}$

ゆえに，いずれの場合も与式が成り立つ.

11 点 $(x_1,\ y_1)$ における 傾きは $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x_1}{y_1}$ であるから，接線の方程式は $y-y_1=-\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1)$. $x_1^2+y_1^2=1$ を用いて整理すると $x_1x+y_1y=1$

12 $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

13 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2+2ax+y^2}{2y(x-a)}$

14

(1) $y''=56x^6$ (2) $y''=8(7x^2+1)(x^2+1)^2$

(3) $y''=\dfrac{2}{x^3}$ (4) $y''=\dfrac{8}{(2x-1)^3}$ (5) $y''=\dfrac{3}{4\sqrt{x}}$

(6) $y''=-\dfrac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

15 $\dfrac{(-2)^{n-1}n!}{(2x-1)^n}$

16

(1) $-2\cos 2x$

(2) $2\sin x\cos x$ ($\sin 2x$ でもよい)

(3) $\cos^2 x-\sin^2 x$ ($\cos 2x$ でもよい)

(4) $-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

17 $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

18

(1) $-\sin x$ (2) $-2\cos 2x$

(3) $\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ (4) $\dfrac{8\sin(1-2x)}{\cos^3(1-2x)}$

19

(1) $\dfrac{1}{x}$ (2) $\dfrac{2\log x}{x}$

(3) $\dfrac{2}{x\log 10}$ (4) $-\dfrac{1}{x(\log x)^2}$

20 略

21

(1) $\dfrac{5}{5x-2}$ (2) $-\tan x$

(3) $\dfrac{2x+1}{x^2+x}$ (4) $\dfrac{1}{x\log x}$

22

(1) $-2xe^{x^2}$ (2) $3\cdot 2^{3x+1}\log 2$

(3) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ (4) $(x+1)e^x$

(5) $(\sin x+\cos x)e^x$

23 e^{-1}

24

(1) e^3 (2) e^2 (3) 1

25

(1) $y'=\dfrac{(3x^2-x-8)(x+1)(x+2)}{(x-1)^2}$

(2) $y'=x^2(x+2)(x-1)(7x^2+5x-6)$

(3) $y'=(x+1)^x\left(\log|x+1|+\dfrac{x}{x+1}\right)$

(4) $y'=\sqrt{x+2}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+2}}$

(5) $y'=\dfrac{1}{\cos x}\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

26 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $\sqrt{3}$，$x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき 1

27 $\dfrac{1}{4}$

28 $-\dfrac{b}{a}$

29

(1) 接線 $y=x+1$，法線 $y=-x+1$

(2) 接線 $y=\dfrac{1}{2}x+\log 2-\dfrac{1}{2}$，法線 $y=-2x+\log 2+2$

(3) 接線 $y=x$，法線 $y=-x+\pi$

30 $x=\pm\sqrt{3}$ のときの接線．$y=(2\pm\sqrt{3})e^{\pm\sqrt{3}}(x-1)$ (複号同順)

31 $y=(\sqrt{2}+1)x+\left(\dfrac{8-(\sqrt{2}+1)\pi}{4}\right)a$

32 $a=\dfrac{1}{2e}$，接点 $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2}\right)$

33

(1) $x=1$　(2) $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　(3) $x=\dfrac{e^2-1}{2}$

34 $y=e^x$ について区間 $[0,\ a]$ で平均値の定理を使う．

$a>1$ より $1<\dfrac{e^a-1}{a}$ を示せばよい．

$y=e^x$ について，平均値の定理より $0<c<a$ で $e^c=\dfrac{e^a-e^0}{a-0}$ となる c が存在する．e^x が単調増加関数であるから $e^0<e^c<e^a$ である．

よって，$1<\dfrac{e^a-1}{a}<e^a$ が示せた．

35 $x=0$ で極小値 0，$x=2$ で極大値 $\dfrac{4}{e^2}$

36 $x=\frac{1}{6}\pi,\ \frac{5}{6}\pi$ で極大値 $\frac{3}{2}$, $x=\frac{1}{2}\pi$ で極小値 1

37 グラフをかくと $x=0$ で極小値 0 を持つことがわかる．

38 $f'(x)=\frac{x(3x+4)}{2|x|\sqrt{2+x}}$ より増減表は

x	-2	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$		$+$
y		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

極大値 $f(-\frac{4}{3})=\frac{4\sqrt{6}}{9}$ 極小値 $f(0)=0$

なお，$\displaystyle\lim_{x\to-0}y'=-\sqrt{2}$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}y'=\sqrt{2}$

39 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 $x=\dfrac{\pi}{2}$，$x=\dfrac{3\pi}{2}$ で最小値 $x=-\dfrac{3\pi}{2}$

40 $\sin x=t$ とおくとよい．$x=\dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$ で最小値 $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$．$x=\dfrac{1}{4}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi$ で最大値 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$．

41 $x=1$ で最小値 $\log 2$．

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}y=\infty$ であることを確認して，最大値なし．

42

(1) $x+a=e^x$

(2) $a>\dfrac{1}{2}$，$a<-\dfrac{1}{6}$ のとき 0 個，$a=0,\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{6}$ のとき 1 個，$-\dfrac{1}{6}<a<\dfrac{1}{2}$，$(a\neq 0)$ のとき 2 個

43 $x>0$ に注意．$x^{\frac{3}{2}}+1=mx$ として 2 つのグラフを比べればよい．

$m>\dfrac{3}{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}}$

44 $f(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと，$f'(x)=e^x-(1+x)$

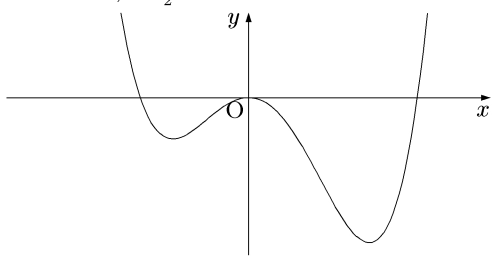
条件より $x>0$ で $f'(x)>0$ であるから $f(x)$ は単調増加．また，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で連続で $f(0)=0$ であるから成り立つ．

45 $k\geqq\frac{\log x}{x^2}$ を考えて，右辺の最大値を求める．$k=\frac{1}{2e}$

46 $x=-\frac{5}{4}$, 2 で極小値 $-\frac{4375}{256}$，-12．$x=0$ で極大値 0．

$x=\frac{3\pm\sqrt{129}}{12}$ で変曲点．

x 切片は 0，$\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$



47

(1) $x=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}y=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}y=\infty$

(2) $x=3$，$\displaystyle\lim_{x\to3-0}y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to3+0}y=-\infty$

(3) $x=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}y=-\infty$

$x=4$，$\displaystyle\lim_{x\to4-0}y=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to4+0}y=\infty$

48

(1) $x\to\infty$ のときも $x\to-\infty$ のときも $y=0$

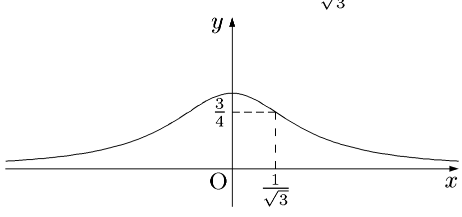
(2) $x\to\infty$ のときも $x\to-\infty$ のときも $y=x$

49 $x\to\infty$ のとき $y=x+1$, $x\to-\infty$ のとき $y=-x-1$

50 $x\to\infty$ のとき $y=3x+\frac{1}{3}$，$x\to-\infty$ のとき $y=-3x-\frac{1}{3}$

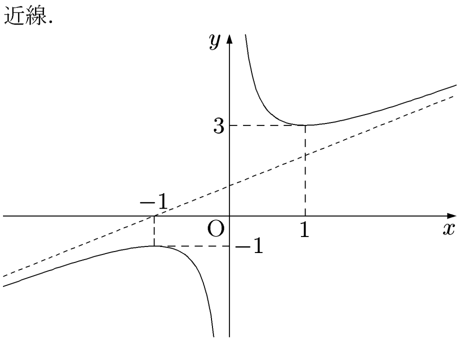
51

(1) $x=0$ で極大値 1，$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ で変曲点．x 軸が漸近線．

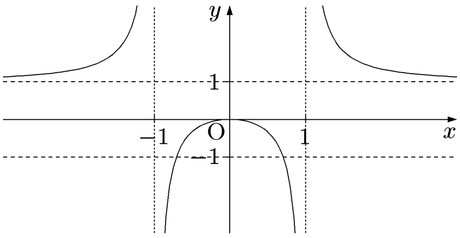


(2) $x=-1$ で極大値 -1，$x=1$ で極小値 3，$y=x$ が漸

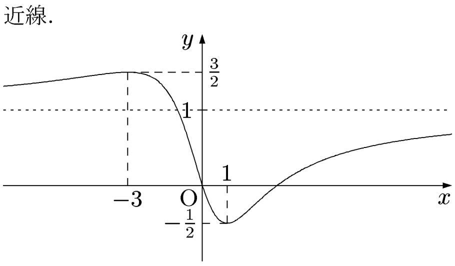
近線.



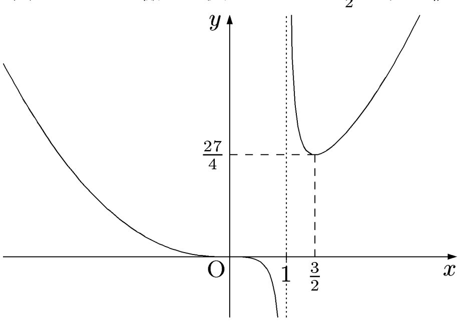
(3) $x=0$ で極大値 0, $x=1$, $y=\pm1$ が漸近線.



(4) $x=-3$ で極大値 $\frac{3}{2}$, $x=1$ で極小値 $-\frac{1}{2}$. $y=1$ が漸近線.

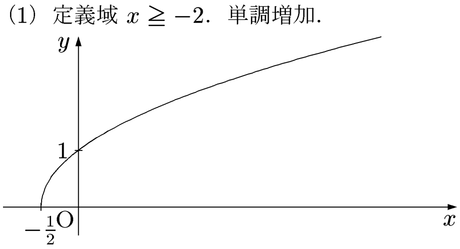


(5) $x=0$ で棚かつ変曲点. $x=\frac{3}{2}$ で極小値 $\frac{27}{4}$. 漸近線なし.

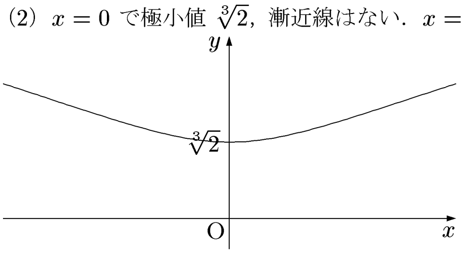


52

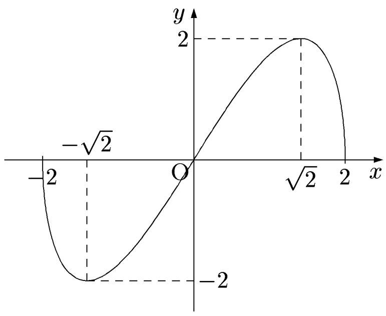
(1) 定義域 $x \geqq -2$. 単調増加.



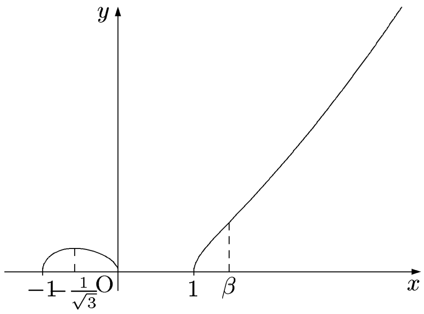
(2) $x=0$ で極小値 $\sqrt[3]{2}$, 漸近線はない. $x=\pm\sqrt{6}$ で変曲点.



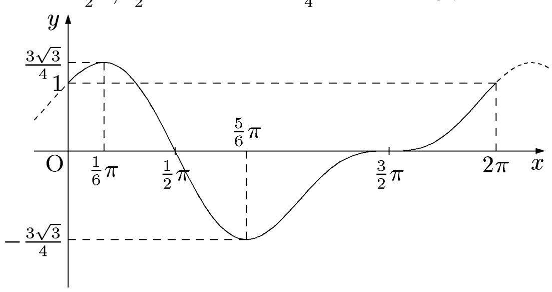
(3) 定義域 $-2 \leqq x \leqq 2$. $x=0$ で変曲点.
$x=-\sqrt{2}$ で極小値 -2. $x=\sqrt{2}$ で極大値 2.



(4) 定義域 $-1 \leqq x \leqq 0$, $1 \leqq x$.
$x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ で極大値 $\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}$.
($3x^4-6x^2-1=0$ が 2 解 $\pm\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+3}}{\sqrt{3}} \fallingdotseq \pm1.467889825$ をもつが, 正の方のみが変曲点となる. これを β とおく.)
(本問では変曲点までわからなくても問題ないが, 常に計算して確認しようとする姿勢は大事である.)

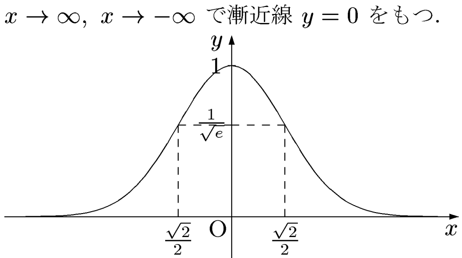


53 $x=\frac{1}{6}\pi$ で極大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x=\frac{5}{6}\pi$ で極小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$
$x=\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$ と $\sin x=-\frac{1}{4}$ となる点が変曲点

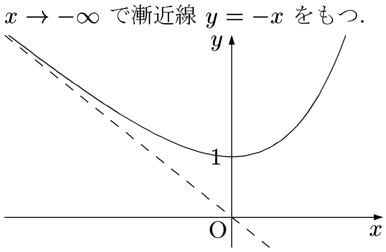


54

(1) $x=0$ で極大値 1, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ で変曲点.
$x\to\infty$, $x\to-\infty$ で漸近線 $y=0$ をもつ.



(2) $x=0$ で極小値 1.
$x\to-\infty$ で漸近線 $y=-x$ をもつ.

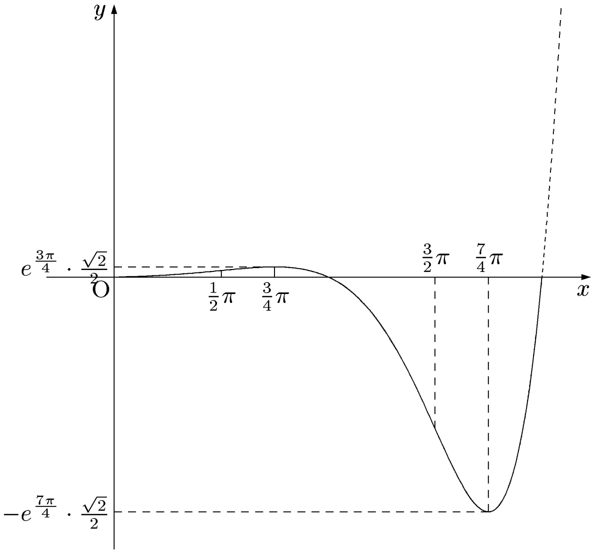


(3) $x=\frac{3}{4}\pi$ のとき極大値 $e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\frac{7}{4}\pi$ のとき極大値 $-e^{\frac{7\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$ のとき変曲点.

$x\to-\infty$ で漸近線 $y=0$ をもつ.

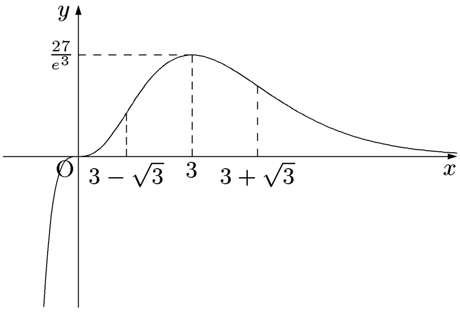


(4) $y'=x^2(3-x)e^{-x}$，$y''=x(x^2-6x+6)e^{-x}$.

$x=3$ で極大値 $\frac{27}{e^3}$.

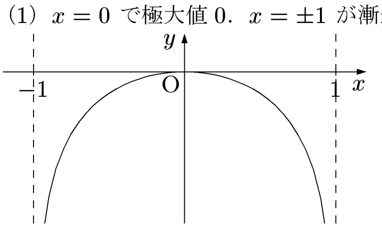
$x=0,\ 3\pm\sqrt{3}$ のとき変曲点.

$x\to\infty$ で漸近線 $y=0$ をもつ.



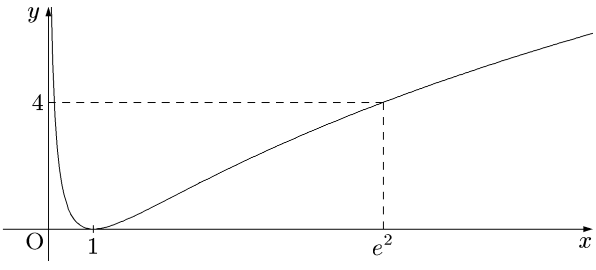
55

(1) $x=0$ で極大値 0. $x=\pm1$ が漸近線.

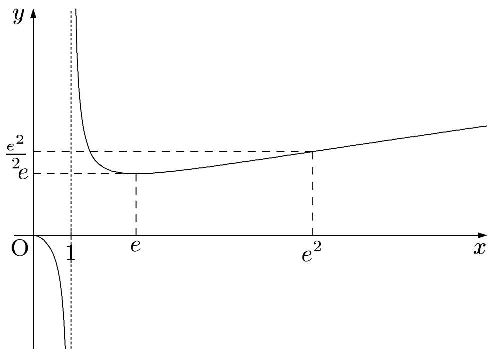


(2) $x=1$ で極小値 0. $x=0$ が漸近線.

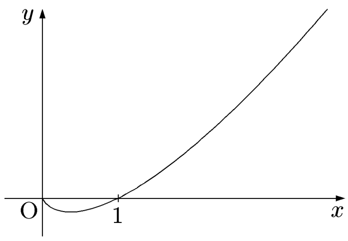
$x=e^2$ で変曲点.



(3) $x=e$ で極小値 e. $x=e^2$ で変曲点. $x=1$ が漸近線.



(4) 漸近線なし.



56

(1) 奇関数であるから原点対称

(2) 偶関数であるから y 軸対称

(3) 直線 $y=x$ に関して対称かつ原点対称

(4) x 軸対称. $y=\pm x^{\frac{3}{2}}$ と考えるてもよい.

57

(1) $t=1,\ \dfrac{4}{3}$ (2) $-1,-\dfrac{4}{3}$ (3) 4, 10

58

(1) 速度 $(-2\sin2t,\ 2\cos2t)$ 大きさ 2，加速度 $(-4\cos2t,-4\sin2t)$ 大きさ 4

(2) 速度 $2(-\sin2t,\ \cos2t)$ が点の位置ベクトル $(\cos2t,\ \sin2t)$ と直行することより明らか.

(3) 加速度 $-4(\cos2t,\sin2t)$ が，点の位置ベクトルと逆方向を向いていることより明らか.

59 $x=1$ における $y=f(x)$ の接線の方程式が近似式となる.

$f(x)\fallingdotseq\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$ より $f(1.01)\fallingdotseq1.0033$

60 $f(x)\fallingdotseq x$ より $\log1.05=f(0.05)\fallingdotseq0.05$

61 略

62 略