解説 LEVEL UP 問題

第１章 数と式

1 $x>1$ として，$y=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ とおく．$5y+\sqrt{y^2-1}$ を根号を用いない x の式で表せ．また，$5y+\sqrt{y^2-1}=7$ となる x の値を求めよ．　（03 摂南大）

<考え方>
根号の中が平方の形になれば，根号ははずれる．
$x>1$ であることに注意する．

$$\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases} A & (A\geqq 0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$$

解 $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ より，両辺を 2 乗して 1 を引くと，

◀ $\sqrt{\ }$ の中を x の式で表し，平方の形を意識して変形する．

$$y^2-1=\left\{\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}^2-1$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\right\}=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$$

◀ $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=x^2-2+\dfrac{1}{x^2}$

ここで，$x>1$ より，　$x>\dfrac{1}{x}$ つまり，$x-\dfrac{1}{x}>0$

◀ $x>1$ より，$\dfrac{1}{x}<1$

したがって，　$\sqrt{y^2-1}=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\left|x-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

◀ $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases} A & (A\geqq 0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$

よって，　$5y+\sqrt{y^2-1}=5\cdot\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\boldsymbol{3x+\dfrac{2}{x}}$　……①

また，$5y+\sqrt{y^2-1}=7$ に①を代入して，

$$3x+\frac{2}{x}=7 \qquad 3x^2-7x+2=0$$

◀ 両辺に x を掛ける．

$(x-2)(3x-1)=0$ より，　$x=2,\ \dfrac{1}{3}$

よって，$x>1$ より，　$\boldsymbol{x=2}$

◀ 解の吟味 $x>1$ を忘れない．

One Point Lesson

・$\sqrt{A^2}=|A|$　をしっかり使えるようにしよう．
・次の式変形もよく用いられる．

$$\boldsymbol{x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

$$\boldsymbol{x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\boldsymbol{x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2}$$

利用

$$\boldsymbol{x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)}$$

2 $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$，$y=\dfrac{5x+4}{x+1}$ のとき，

(1) y の整数部分と小数部分を求めよ．

(2) y に最も近い整数値を求めよ．

（麻布大） → p. 718 49

＜(1)の考え方＞

x の分母を有理化してから，y に代入する．

(1)の解

$$x=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

◀ 分母を有理化して，簡単にしてから y に代入する．

より，

$$\begin{aligned}y&=\frac{5x+4}{x+1}=\frac{5(x+1)-1}{x+1}=5-\frac{1}{x+1}\\&=5-\frac{1}{(2-\sqrt{3})+1}=5-\frac{1}{3-\sqrt{3}}\\&=5-\frac{3+\sqrt{3}}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=5-\frac{3+\sqrt{3}}{6}=\frac{27-\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

◀ $y=\dfrac{5x+4}{x+1}$ に $x=2-\sqrt{3}$ をそのまま代入してもよい．

$1<\sqrt{3}<2$ より，　$25<27-\sqrt{3}<26$

◀ $1<\sqrt{3}<2$ より，$-2<-\sqrt{3}<-1$ 各辺に 27 をたすと，$27-2<27-\sqrt{3}<27-1$

したがって，　$\dfrac{25}{6}<\dfrac{27-\sqrt{3}}{6}<\dfrac{26}{6}$

よって，$4<\dfrac{25}{6}<\dfrac{26}{6}<5$ より，

y の**整数部分**は，　**4**

y の**小数部分**は，　$\dfrac{27-\sqrt{3}}{6}-4=\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}}$

◀ （小数部分）＝（もとの数）－（整数部分）

＜(2)の考え方＞

y の小数部分と 0.5 の大小を調べる．

(2)の解

y の小数部分と 0.5 の大小を調べる．

$$0.5-\frac{3-\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{2}-\frac{3-\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}>0 \text{ より，}\quad 0<\frac{3-\sqrt{3}}{6}<0.5$$

したがって，　$4<y<4.5$

よって，y に最も近い整数値は，　**4**

◀ $\dfrac{25}{6}<\dfrac{27-\sqrt{3}}{6}<\dfrac{26}{6}$ より，$4.1\dot{6}<\dfrac{27-\sqrt{3}}{6}<4.\dot{3}$

One Point Lesson

p.57 の例題 27 でも用いたが，実数の小数部分は，（小数部分）＝（もとの実数）－（整数部分）というように小数部分を直接算出せずに表すことができる．
例えば，$\pi=3.14\cdots$ であるが，その小数部分は，（π の小数部分）$=\pi-3$ である．
また，小数部分 s はつねに $0\leqq s<1$ を満たすこともおさえておこう．
数や式は利用するだけでなく，その背景にある論理性を同時につかんでおくことが大切である．