

1 式の展開と因数分解

 $(x+1)^n$ の展開を考えよう

■単元の目標

これまでの考え方を使って、 $n \geq 3$ について $(x+1)^n$ の展開ができることに気づく。

ねらいと評価

■本時のねらいと解説

$(x+1)^n$ の展開を考えさせることを通して、いままでの考え方が適用できることに気づかせることをねらう。

本時の学習内容は、高等学校の学習内容である二

項定理 $(1+x)^n = \sum_{r=0}^n {}_nC_r x^r$ (ただし、 n は 0 以上

の整数で、各 ${}_nC_r$ は二項係数

${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$ である。) に基づく内容である。

ここでは、二項係数そのものを発見させることが目的ではない。

各項の係数に着目させ、その並び方を観察させ、帰納的に考えさせることを通して、その中に潜む規則性を発見させたい。そして、 $n=1$ から成り立っているパスカルの三角形を発見させ、数学の神秘さ、美しさに気づかせたい。

■評価のポイント

・数学への関心・意欲・態度

$n \geq 3$ の展開がどうなるのかを意欲的に確かめようとしている。

・数学的な見方・考え方

係数のきまりについていろいろなアイデアを出し、試行錯誤し、帰納的に考えることができる。

展開と対応

■授業展開のポイント

まず、導入問題として、 $n=2$ の時の $(x+1)^2$ を展開させる。そして、 $n=3$ の時の $(x+1)^3$ の展開を考えさせる。ここでは、乗法公式は使えないので、どうしたら計算できるかを考えさせる。計算方法としては、3 乗のうちの 2 乗を展開した式に、分配法則を使って展開する。

次に、 $n=4$ の時の $(x+1)^4$ の展開をさせる。

ここでは、 $(x+1)^2$ と $(x+1)^3$ の展開の方法をもとに計算させる。生徒が考える方法としては、

① 4 乗を 3 乗と 1 乗に分けて計算

② 4 乗を 2 乗と 2 乗に分けて計算

の 2 つがあるが、①が多いであろう。

さらに、 $n=5$ の時の展開を予想させる。ここでは、特に x^3 と x^2 の係数に焦点をあて、予想させる。 $(x+1)^2$ と $(x+1)^3$ と $(x+1)^4$ の展開の結果をもとに帰納的に予想させる。その後、展開し、確かめさせる。

最後に、項の係数に潜むきまりを考えさせる。ここでは、 $n=4$ のときの x^3 の係数 4 と x^2 の係数 6 の和が、 $n=5$ のときの x^3 の係数 10 になっていることに生徒は気づく。ほかの係数にも同じ関係が成立していないか類推して考えさせる。

ただし、ここで発見したきまりは、計算結果から n が 2 から 5 までは保証できるが、6 以上の n についての根拠がない。本来は数学的帰納法で証明する必要があるかもしれないが、ここでは、パスカルの三角形を発見させ、その名前を紹介するところまでにしておく。そして、数学に潜む神秘さや美しさを感じさせたい。

ワークシート 解答

1 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

2 $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

3 $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

4 $(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

5 パスカルの三角形の図

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \vee & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & & \vee & & \vee & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

$(x + 1)^n$ の展開を考えよう

組 氏名

- 1** $(x + 1)^2$ を展開すると、 $x^2 + \square x + 1$ となります。
□にあてはまる数字は何ですか。

- 2** $(x + 1)^3$ を展開すると、 $x^3 + \square x^2 + \square x + 1$ となります。

(1) どのようにして、計算したらよいか考えよう。

(2) □にあてはまる数字は何ですか。

- 3** $(x + 1)^4$ を展開すると、 $x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x + 1$ となります。

(1) どのようにして、計算したらよいか考えよう。

(2) □にあてはまる数字は何ですか。

- 4** $(x + 1)^5$ を展開すると、 $x^5 + \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x + 1$ となります。

(1) □にあてはまる数字を予想してみよう。

(2) 実際に計算して、確かめてみよう。

- 5** 各項の係数には、どんなきまりがあるか考えてみよう。