数暗攻 ～２次関数，２次方程式・不等式～ 数学Ⅰ

1　次の２次不等式を解け。

(1)　$(x-1)(x-3)<0$

(2)　$(x+1)(x-2)>0$

(3)　$(x-2)^2 \geqq 0$

(4)　$(x+5)^2 \leqq 0$

(5)　$(x-1)^2>0$

(6)　$(x+3)^2<0$

(7)　$(x-a)(x-1)<0$

<point>
２次不等式の解法は x^2 の係数を正にする。

<point>
場合分け

解）①(　　のとき，　　)

②(　　のとき，　　)

③(　　のとき，　　)

2　２次不等式 $ax^2+bx+c<0$ がどのような実数 x に対しても常に成り立つための条件は，$\begin{cases}(\quad) \\ (\quad)\end{cases}$ である。

<point>
$y=ax^2+bx+c$ のグラフの概形

3　２次不等式 $ax^2+x+b>0$ の解が $-1<x<2$ のとき，定数 a，b の値を求めよ。

解）

$-1<x<2 \Leftrightarrow$ (　①　) <0

$\Leftrightarrow x^2-x-2<0$

$\Leftrightarrow$ (　②　) >0

係数を比較して，

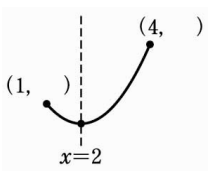
a=(　③　)，　b=(　④　)

4　$a>0$ とする。２次関数 $y=ax^2-4ax+b$ の $1 \leqq x \leqq 4$ における最大値が 6，最小値が -2 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解）$y=ax^2-4ax+b$

$=a(x-2)^2-4a+b$

∴　軸 x=(　①　)，$a>0$ より(　②　)



よって，x=(　③　)で最大値をとるので，

$y=16a-16a+b=6$

∴ b=(　④　)

また，x=(　⑤　)で最小値をとるので，(　⑥　)=-2

∴ $a=2$

これは　$a>0$ を満たす。

5　関数 $y=x^2-2ax+4$　$(0 \leqq x \leqq 3)$ の最小値を求めよ。

軸の場合分け！

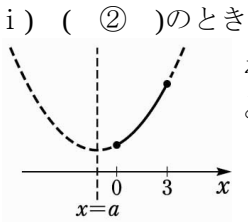
解）

$y=x^2-2ax+4$

$=(x-a)^2-a^2+4$　　軸 $x=$(　①　)

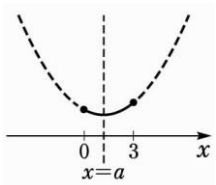
下に凸

(ⅰ)　(　②　)のとき



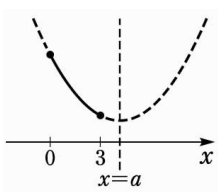
$x=$(　③　)のとき最小となり，最小値(　④　)

(ⅱ)　(　⑤　)のとき



$x=$(　⑥　)のとき最小となり，最小値(　⑦　)

(ⅲ)　(　⑧　)のとき



$x=$(　⑨　)のとき最小となり，最小値(　⑩　)

1

(1)　$1<x<3$

(2)　$x<-1$，$2<x$

(3)　すべての実数

(4)　$x=-5$

(5)　$x \neq 1$ のすべての実数

(6)　解なし

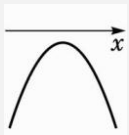
(7)

①　$a>1$ のとき，$1<x<a$

②　$a=1$ のとき，解なし

③　$a<1$ のとき，$a<x<1$

2　$y=ax^2+bx+c$ のグラフが下図のようであればよい。



∴ $\begin{cases}a<0 \\ D=b^2-4ac<0\end{cases}$

上に凸で，x 軸と交わらない。

3

①　$(x+1)(x-2)$

②　$-x^2+x+2$

③　-1　　④　2

4

①　2　②　下に凸

③　4

④　6

⑤　2

⑥　$-4a+b$

頂点の y 座標

5

①　a

②　$a<0$

③　0

④　4

⑤　$0 \leqq a<3$

⑥　a

⑦　$-a^2+4$

⑧　$a \geqq 3$

⑨　3

⑩　$13-6a$

6［解の存在範囲］

２次方程式 $f(x)=0$ がある。(x^2 の係数は正とする。) この２次方程式が次のような解をもつための条件をいえ。

(1)　異なる２つの実数解が，ともに１より小さい。

(2)　異なる２つの実数解のうち，１つは２より大きく他の１つは２より小さい。

(3)　$0<x<3$ の範囲に，異なる２つの実数解をもつ。

(4)　１つが $-1<x<1$ の範囲に，他の１つが $2<x<3$ の範囲にある。

7

(1)　２次不等式 $x^2+2x-k>0$ が，すべての実数 x に対して，常に成り立つための定数 k の値の範囲を求めよ。

解）条件を満たすためには，２次方程式 $x^2+2x-k=0$ の判別式を D とすると，(　①　)であればよい。

$\frac{D}{4}$=(　②　)より，

k の範囲は，(　③　)

(2)　２次方程式 $x^2+mx+m+3=0$ が実数解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解）　実数解をもつ

$\Leftrightarrow$ 判別式を D とすると(　④　)

$D=m^2-4\cdot1\cdot(m+3)$

$=m^2-4m-12$

∴ $(m-6)(m+2) \geqq 0$ より (　⑤　)

8　次の２次不等式を解け。

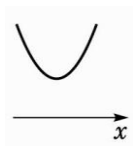
(1)　$x^2+2x-2 \geqq 0$

＜point＞
i に不等号はつかない！

(2)　$x^2+2x+4<0$

$\frac{D}{4}=1-4=-3<0$ より

$y=x^2+2x+4$ のグラフは，

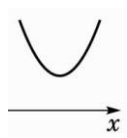


(3)　$x^2<5$

(4)　$x^2+x+3 \geqq 0$

$D=1-12=-11<0$ より

$y=x^2+x+3$ のグラフは，



9　$y=|x-2|$ のグラフは，まず，絶対値の中の $y=$(　①　)のグラフをかき，x 軸より下の部分を(　②　)。

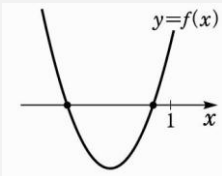
※　$x \geqq 2$ では，$y=x-2$，$x<2$ では，

$y=$(　③　)　の V 字形になる。

6

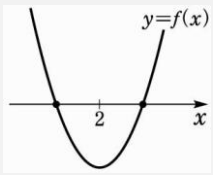
$f(x)=0$ の判別式を D とする。

(1)



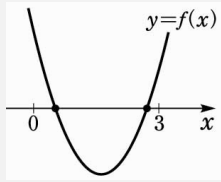
$\begin{cases}D>0 \\ 軸<1 \\ f(1)>0\end{cases}$

(2)



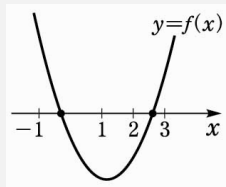
$f(2)<0$ のみ

(3)



$\begin{cases}D>0 \\ 0<軸<3 \\ f(0)>0 \\ f(3)>0\end{cases}$

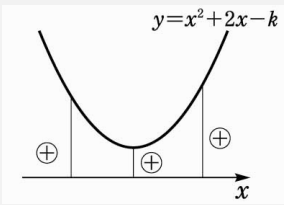
(4)



$\begin{cases}f(-1)>0 \\ f(1)<0 \\ f(2)<0 \\ f(3)>0\end{cases}$

7

(1)



x 軸と交わらない

①　$\frac{D}{4}<0$

②　$1+k$　③　$k<-1$

(2)

④　$D \geqq 0$

⑤　$m \leqq -2$，$6 \leqq m$

8

(1)　$x^2+2x-2=0$ より

$x=-1 \pm \sqrt{3}$

$x \leqq -1-\sqrt{3}$，$-1+\sqrt{3} \leqq x$

(2)　$x^2+2x+4=0$ より，

$x=-1 \pm \sqrt{3}i$

∴ 解なし

㊟　$-1-\sqrt{3}i<x<-1+\sqrt{3}i$ としたら ダメ

(3)　$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$

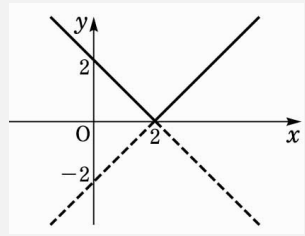
㊟　$x<\pm\sqrt{5}$ としたら ダメ

(4)　すべての実数

9

①　$x-2$

②　上に折り返す



③　$-x+2$