数暗攻 ～数列②～　数学Ｂ

13　部分分数に分解せよ。

(1)　$\dfrac{1}{n(n+3)}$

(2)　$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

14　次の和を求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

解）一般項　$a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

$=^{①}((\quad)-(\quad))$

↑ 部分分数

∴　和　$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$　部分分数の和

$=($　②　$)$

$=^{③}\left(\dfrac{(\quad)}{(\quad)}-\dfrac{(\quad)}{(\quad)}\right)\quad=\dfrac{n}{2(n+2)}$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots$

$\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

解）　一般項　$a_n=^{④}\left(\dfrac{1}{\sqrt{(\quad)}+\sqrt{(\quad)}}\right)$

$=($　⑤　$)$　有理化

和　$S=^{⑥}(\displaystyle\sum\qquad)$

$=($　⑦　$)$

$=^{⑧}(\qquad-\qquad)=9$

15　次の数列の初項から第 n 項までの和 S を求めよ。

(1)　1，$1+2$，$1+2+2^2$，$1+2+2^2+2^3$，…

解）

一般項　$a_n=^{①}(1+\qquad+\qquad+\cdots+\qquad)$

$=($　②　$)$　等比数列の和

和　$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)$

$=($　③　$)=2^{n+1}-2-n$

(2)　1，$1+2$，$1+2+3$，$1+2+3+4$，…

解）

一般項　$a_n=^{④}(1+\qquad+\qquad+\cdots+\qquad)$

$=($　⑤　$)$

和　$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$=\dfrac{1}{2}\{($　⑥　$)+($　⑦　$)\}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

16　$n\geqq2$ とする。次の数列の和 S を求めよ。

$S=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots\cdots+n\cdot2^{n-1}$

解）

$S=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots\cdots+n\cdot2^{n-1}$

①　$S=\qquad1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots\cdots+($　②　$)$

辺々引くと，

$-S=^{③}(1+\qquad\qquad)$

$=($　④　$)-n\cdot2^n$

$=2^n-1-n\cdot2^n$

$=(1-n)\cdot2^n-1$

∴　$S=($　⑤　$)$

<point>　(等差・等比)の数列の和は，公比をかけて，ずらして，辺々引く！

13

(1)　$\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+3}\right)$

$(n+3)-n=3$

(2)　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$(2n+1)-(2n-1)=2$

14

(1)

①　$\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

②

$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)+$

$\cdots+\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

③　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}$

(2)

④　有理化

$\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}\times\dfrac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}$

⑤　$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

⑥

$\displaystyle\sum_{k=1}^{99}a_k=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

⑦

$(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+$

$\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

⑧　$\sqrt{100}-\sqrt{1}$

15

初項 1，公比 2，項数 n の等比数列の和

①　$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$

②　$\dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

③　$\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}-n$

④　$1+2+3+\cdots+n$

⑤　$\dfrac{n(n+1)}{2}$

⑥　$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

⑦　$\dfrac{n(n+1)}{2}$

16　(等差・等比)の和

公比

①　2　②　$n\cdot2^n$

③　$\underbrace{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}_{④}-n\cdot2^n$

④　$\dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}$

⑤　$(n-1)2^n+1$

17　次のような群数列がある。

$\{2\},\{4,6\},\{8,10,12\},\{14,16,18,20\}$，……

第 1 群　第 2 群　第 3 群　　第 4 群

(1)　第 n 群の最初の数を求めよ。

解）第 n 群には(　①　)個の数が入っているので，第 n 群の最初の数は，はじめから数えると，

第 $(1+2+3+\cdots+$　②　$)+1$ (番目)である。

∴ (　③　) $+1=\dfrac{n^2-n+2}{2}$ （番目）

群をはずしたもとの数列の一般項は，

$a_n=($　④　$)$ より，

第 n 群の最初の数は，

$2\cdot\left(\dfrac{n^2-n+2}{2}\right)=($　⑤　$)$

(2)　第 n 群の和を求めよ。

解）第 n 群は，初項 n^2-n+2，公差 2，項数 n の等差数列の和より，

和　$S=($　⑥　$)=n(n^2+1)$

<point>
102 は第何群の何番目か？
⇒予想する！　10 群の最初は $10^2-10+2=92$
11 群の最初は $11^2-11+2=112$

→ 102 は第 10 群の 6 番目

18　次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4$

(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n$

(3)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+2n-1$

解）　$a_{n+1}-a_n=2n-1$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=($　①　$)$

$=^{②}(2+\qquad)$

$=n^2-2n+3$

これは，(　③　)　∴　$a_n=n^2-2n+3$

(4)　$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+4$

解）

$\alpha=3\alpha+4$ より
$\alpha=-2$

$($　④　$)$

$a_n+2=($　⑤　$)$

∴　$a_n=($　⑥　$)$

(5)　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$

解）$a_n\neq0$ より，(　⑦　)，

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3a_n+1}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}+($　⑧　$)$

$($　⑨　$)=b_n$　とおくと，$^{⑩}(\qquad=\qquad)$

数列 $\{b_n\}$ は，公差 3 の等差数列より，

$b_n=b_1+(n-1)\cdot3=($　⑪　$)$

∴　$a_n=($　⑫　$)$

19　n を自然数とする。5^n-1 は，4 の倍数であることを数学的帰納法で証明せよ。

証明）与えられた命題をⒶとする。

(ⅰ)　$n=1$ のとき，$5^1-1=4$ より，

$n=1$ のとき，Ⓐは成り立つ。

(ⅱ)　$n=k(k\geqq1)$ のとき，

Ⓐが成り立つと(　①　)。

つまり，m を整数として

$5^k-1=($　②　$)$とかけると仮定する。

このとき，$n=($　③　$)$のときを考えると，$5^{k+1}-1=5\cdot5^k-1$

$=5($　④　$)-1$

$=20m+4=4(5m+1)$

$5m+1$ は整数より，$5^{k+1}-1$ は 4 の倍数となり，$n=k+1$ のときⒶは成り立つ。

(ⅰ)，(ⅱ)よりすべての自然数 n で，Ⓐは成り立つ。

17

①　n

②　$n-1$

③　$\dfrac{(n-1)\cdot n}{2}$

④　$2n$

⑤　n^2-n+2

4(1)②を参照！　等差数列の和の公式

⑥

$\dfrac{n}{2}\{2(n^2-n+2)+(n-1)\cdot2\}$

18

(1)　$a_n=1+(n-1)\cdot4$

$=4n-3$

(2)　$a_n=3\cdot2^{n-1}$

<point>　『$a_{n+1}-a_n$』は階差数列 b_n のこと！

①　$2+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

②　$2+2\dfrac{(n-1)\cdot n}{2}-(n-1)$

③　$a_1=2$ を満たす

(4)

④　$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$

⑤　$(a_1+2)\cdot3^{n-1}=4\cdot3^{n-1}$

⑥　$4\cdot3^{n-1}-2$

(5)

⑦　両辺の逆数をとると

⑧　3

⑨　$\dfrac{1}{a_n}$

⑩　$b_{n+1}=b_n+3$

⑪　$2+(n-1)\cdot3=3n-1$

⑫　$\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3n-1}$

19

①　仮定する

②　$4m$

③　$k+1$

④　$4m+1$

②より $5^k-1=4m$
$5^k=4m+1$