数暗攻 ～複素数と方程式，式と証明　②～　数学Ⅱ

17　［3 次方程式の解と係数の関係］

3 次方程式　$ax^3+bx^2+cx+d=0$　の 3 つの解を，α，β，γ とすると，

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=(\quad ①\quad)\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=(\quad ②\quad)\\ \alpha\beta\gamma=(\quad ③\quad)\end{cases}$$

したがって，3 次方程式

$2x^3-3x^2+x-1=0$　の 3 つの解を α，β，γ とすると

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=(\quad ④\quad)\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=(\quad ⑤\quad)\\ \alpha\beta\gamma=(\quad ⑥\quad)\end{cases}$$

18　［対称式］

①　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\qquad\qquad)$

↑

$\alpha+\beta+\gamma$ と，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ を用いて表せ。

19　実数係数の方程式において，

$3+2i$ が解であるならば，それと共役な複素数(　①　)も解になる。

20　3 次方程式　$x^3-3x^2+ax+b=0$　の 1 つの解が $1+3i$ であるとき，実数の定数 a，b の値と，他の解を求めよ。

解）

実数係数の方程式より(　①　)も解である。

よって，他の解を α とすると，

解と係数の関係より，

$$\begin{cases}(\qquad ②\qquad)\\ (\qquad ③\qquad)\\ (\qquad ④\qquad)\end{cases}$$

これを解いて，$a=12$，$b=-10$，$\alpha=1$

他の解は，1 と $1-3i$

21　多項式 $P(x)$ を，$x-2$ で割ると余りが 3，$x+3$ で割ると余りが－7 である。

$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りを求めよ。

解）

$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，

$P(x)=(\qquad ①\qquad)$

条件より，

$P($　②　$)=($　③　$)$，

$P($　④　$)=($　⑤　$)$

よって，

$2a+b=3$，(　⑥　)

これを解いて，$a=2$，$b=-1$

したがって，求める余りは，(　⑦　)

22　2 次方程式　$x^2-8x+m=0$　において，1 つの解が他の解の 3 倍であるとき，定数 m の値と，2 つの解を求めよ。

解）

2 つの解は α，(　①　)と表せる。$(\alpha\neq 0)$

解と係数の関係より，

$$\begin{cases}(\qquad ②\qquad)\\ (\qquad ③\qquad)\end{cases}$$

これを解いて，$\alpha=2$，$m=12$

2 つの解は，2 と 6

23　次の計算をせよ

(1)　$(1+2i)(1-2i)=(\qquad)$

(2)　$\dfrac{1+i}{i}=(\qquad)$

24　次の等式が x についての恒等式となるように定数 a，b，c の値を求めよ。

(1)　$(a+2)x+5=3x+(b-1)$

$a=(\qquad)$，$b=(\qquad)$

(2)　$2x^2+3x+1$

$=ax(x-1)+bx(x+1)+c(x+1)(x-1)$

$a=(\qquad)$，$b=(\qquad)$，$c=(\qquad)$

25　次の式を　$x+\dfrac{1}{x}$　で表せ。

(1)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=(\qquad)$

(2)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}=(\qquad)$

26

(1)　$x:y:z=2:3:4$ のとき，

x，y，z は，$k(\neq 0)$ を用いて，

$x=(\qquad)$，$y=(\qquad)$，$z=(\qquad)$

とおける。

(2)　$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{7}\Leftrightarrow x:y:z=(\qquad)$

27　x，y，z のうち，少なくとも 1 つが 3 であることを示すには，

(　　) となることを示せばよい。

28　$x>0$，$y>0$ のとき，

相加平均・相乗平均の関係から，

(1)　$x+\dfrac{4}{x}\geqq($　①　$)$，等号成立は，

$x=($　②　$)$

(2)　$(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$　の最小値は，

$(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}+2$　と

変形できることより，(　③　)である。

29　$(k+2)x+(k+1)y-3k-4=0$　が k のどのような値に対しても成り立つような x，y の値を求めよ。

解）

(　①　)すると，

$(x+y-3)k+(2x+y-4)=0$

どのような k の値に対しても成り立つことより，

$$\begin{cases}(\qquad ②\qquad)\\ (\qquad ③\qquad)\end{cases}$$

この連立方程式を解いて，$x=1$，$y=2$

17

①　$-\dfrac{b}{a}$

②　$\dfrac{c}{a}$

③　$-\dfrac{d}{a}$

④　$\dfrac{3}{2}$

⑤　$\dfrac{1}{2}$

⑥　$\dfrac{1}{2}$

18

①

$(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

19

①　$3-2i$

20

①　$1-3i$

②　$(1+3i)+(1-3i)+\alpha=3$

③　$(1+3i)(1-3i)+\alpha(1+3i)$
$+\alpha(1-3i)=a$

④　$(1+3i)(1-3i)\alpha=-b$

21

①

$(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$

②③④⑤

$P(2)=3$，$P(-3)=-7$

⑥　$-3a+b=-7$

⑦　$2x-1$

22

①　3α

②　$\alpha+3\alpha=8$

③　$\alpha\cdot 3\alpha=m$

23

(1)　$1-4i^2=5$

(2)　$\dfrac{(1+i)i}{i\cdot i}=\dfrac{i-1}{-1}=1-i$

24

(1)　$a=1$，$b=6$

(2)　$x=0$ を代入して，$1=-c$

$x=1$ を代入して，$6=2b$

$x=-1$ を代入して，

$0=2a$

$\therefore a=0$，$b=3$，$c=-1$

25

(1)　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

(2)　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

26

(1)　$x=2k$，$y=3k$，$z=4k$

(2)　$3:5:7$

27

$(x-3)(y-3)(z-3)=0$

28　$x>0$，$\dfrac{4}{x}>0$ より

$x+\dfrac{4}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=4$

①　4　　②　2

$x=\dfrac{4}{x}$ より，$x^2=4$

$x>0$ より，$x=2$

③　$\dfrac{y}{x}+\dfrac{2}{y}\geqq 2\sqrt{\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{x}{y}}=2$

$\therefore$　4

29

①　k について整理

②　$x+y-3=0$

③　$2x+y-4=0$