数暗攻 ～複素数と方程式，式と証明　①～　数学Ⅱ

1

(1)　$\sqrt{-3}\times\sqrt{-5}=($　　$)$

(2)　$x^2=-4$ のとき，$x=($　　$)$

(3)　$\sqrt{-4}+\sqrt{-9}=($　　$)$

2　次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(1)　$(x+1)+(y-2)i=4+5i$

$x=($　　$)$，$y=($　　$)$

(2)　$(x-2)+(y+4)i=0$

$x=($　　$)$，$y=($　　$)$

3　次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2+x+1=0$

(2)　$x^2-2x+3=0$

4　次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。

(1)　$2x^2+x+1=0$

(2)　$x^2-5x+5=0$

(3)　$2x^2-2x+\frac{1}{2}=0$

5　a を定数とする。

2 次方程式　$x^2-2ax+4=0$ が異なる 2 つの実数解をもつときは，

判別式 D (　①　) 0 である。

よって，

$\frac{D}{4}=($　　②　　$)>0$

∴　$(a+2)(a-2)>0$ より，

a の値の範囲は，(　③　)である。

6　［解と係数の関係］

2 次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の 2 つの解を α，β とすると，

$\alpha+\beta=($　①　$)$，$\alpha\beta=($　②　$)$

である。

7　次の 2 次方程式の 2 つの解 α，β の和と積をそれぞれ求めよ。

$3x^2-5x-6=0$

$\alpha+\beta=($　①　$)$，$\alpha\beta=($　②　$)$

8　［対称式］

次の式を $\alpha+\beta$ および $\alpha\beta$ を用いて表せ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$

(2)　$\alpha^3+\beta^3$

(3)　$(\alpha-\beta)^2$

(4)　$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

1

(1)　$\sqrt{3}i\times\sqrt{5}i=\sqrt{15}i^2$

$=-\sqrt{15}$

(2)　$x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4}i$

$=\pm 2i$

(3)　$\sqrt{4}i+\sqrt{9}i$

$=2i+3i=5i$

2

(1)　$x=3$，$y=7$

(2)　$x=2$，$y=-4$

3

(1)　$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$

$=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2)　$x=\frac{1\pm\sqrt{1-3}}{1}=1\pm\sqrt{2}i$

4

(1)　$D=1^2-4\cdot2\cdot1=-7<0$

∴　異なる 2 つの虚数解

(2)　$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot5=5>0$

∴　異なる 2 つの実数解

(3)　$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot\frac{1}{2}=0$

∴　重解

5

①　$>$

②　$a^2-1\cdot4=a^2-4$

③　$a<-2$，$2<a$

6

①　$-\frac{b}{a}$　　②　$\frac{c}{a}$

7

①　$\frac{5}{3}$　　②　-2

8

(1)　$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

(2)　$(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

(3)　$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

(4)　$\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

9　x^4-4 を(　　)内の範囲で因数分解せよ。

x^4-4

=(　①　)　(有理数)

=(　②　)　(実数)

=(　③　)　(複素数)

10　2 次方程式　$ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると，

左辺の ax^2+bx+c は，

$ax^2+bx+c=($　①　$)$

と因数分解できる。

よって，$3x^2-7x+5$ は，

$3x^2-7x+5=0$ の解が，$x=\frac{7\pm\sqrt{11}i}{6}$

より，$3x^2-7x+5=($　②　$)$　と因数分解できる。

11　2 数 α，β を解とする 2 次方程式の 1 つは，(　　①　　)$=0$ である。

よって，$2+i$ と $2-i$　を解とする 2 次方程式の 1 つは，(　　②　　)$=0$ である。

12　2 数の(　①　)と(　②　)がわかれば，2 数はわかる。

そのときの 2 数は，

2 次方程式　x^2- 和 $x+$ 積 $=0$　の解である。

例　和が 4，積が 2 である 2 数は，

2 次方程式 (　　③　　)$=0$　を解いて，

$x=($　④　$)$

つまり，(　⑤　)と(　⑥　)である。

13　［剰余の定理］

①　多項式 $P(x)$ を $x-3$ で割った余りは，

(　　)　である。

②　多項式 $P(x)$ を $2x+1$ で割った余りは，

(　　)　である。

14

①　$x^{100}+x^{10}+1$ を $x-1$ で割った余りは，

(　　)　である。

②　$x^{10}+x^6+a$ が $x+1$ で割り切れるとき，

$a=($　　$)$である。

15　x^3-3x^2+2 の因数分解を考える。

$P(x)=x^3-3x^2+2$ とおくと，

$P($ ①　$)=0$ より，

$P(x)$ は，(　　②　　)で，割り切れる。

組立除法より，

1	−3	0	2	1
	1	−2	−2	
1	−2	−2	0	

したがって，$P(x)=x^3-3x^2+2=($　③　$)$

と因数分解できる。

16　1 の 3 乗根のうち，虚数解であるものの 1 つを ω (オメガ)とおくと，

$\omega^3=($　①　$)$，$\omega^2+\omega+1=($　②　$)$

が成り立つ。

よって，$\omega^{30}=($　③　$)$，

$\omega^5+\omega^4=($　④　$)$

9

①　$(x^2-2)(x^2+2)$

②　$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+2)$

③　$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

10

①　$a(x-\alpha)(x-\beta)$

②

$3\left(x-\frac{7+\sqrt{11}i}{6}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{11}i}{6}\right)$

11

①　$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

和　　積

②　$(2+i)+(2-i)=4$

$(2+i)(2-i)=5$

∴　x^2-4x+5

12　①　和　②　積

⇐重要公式！

③　x^2-4x+2

④　$2\pm\sqrt{2}$

⑤　$2+\sqrt{2}$　⑥　$2-\sqrt{2}$

13

①　$P(3)$

②　$P\left(-\frac{1}{2}\right)$

14

①　$P(1)=1^{100}+1^{10}+1=3$

②　$P(-1)=0$ より，

$(-1)^{10}+(-1)^6+a=0$

$2+a=0$　より，$a=-2$

15

①　1

②　$x-1$

③　$(x-1)(x^2-2x-2)$

16

①　1　②　0

③　$\omega^{30}=(\omega^3)^{10}=1^{10}=1$

④　$\omega^5+\omega^4=\omega^2+\omega=-1$

$\omega^2+\omega+1=0$ より，
$\omega^2+\omega=-1$