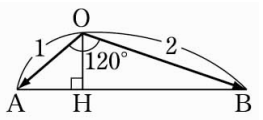
数暗攻 ～ベクトル②～　数学B

13　ΔOAB において，$OA=1$，$OB=2$，$\angle AOB=120°$ とする。頂点Oから AB に垂線OH を下ろす。



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

<point>　$\overrightarrow{OH}$ を求めるためには，(①　：　)がわかればよい。

解)　$AH:HB=t:1-t$ とおくと，

$\overrightarrow{OH}=($　②　$)$　…㋐

$OH\perp AB$ より，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=($　③　$)$

$\therefore\ \{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

整理すると，

$$t|\vec{b}|^2+(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-t)|\vec{a}|^2=0$$

よって，

$t\cdot 2^2+(1-2t)\cdot($　④　$)-(1-t)\cdot 1^2=0$

これを解いて，$t=\dfrac{2}{7}$

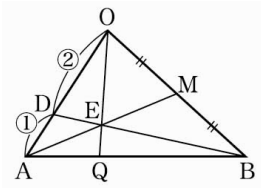
㋐に代入して，$\overrightarrow{OH}=($　⑤　$)$

14　[チェバの定理，メネラウスの定理]

ΔOAB において，辺 OA を $2:1$ に内分する点を D，辺 OB の中点を M とし，線分 AM，BD の交点を E，OE の延長と辺 AB の交点を Q とする。次の比を求めよ。

(1)　$AQ:QB$

(2)　$AE:EM$



(3)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表すと，

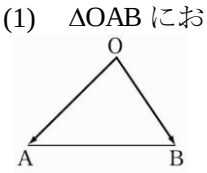
ΔOAM において，$AE:EM=1:1$ より，

$\overrightarrow{OE}=($　①　$)\overrightarrow{OA}+($　②　$)\overrightarrow{OM}$

$=($　③　$)$

15［三角形の面積］

(1)　ΔOAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。ΔOAB の面積 S を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと，



$S=($　①　$)$

(2)　3 点 $O(0,\ 0)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を頂点とする。ΔOAB の面積 S は，

$S=($　②　$)$

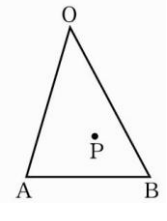
16

(1)　点$(1,\ 2)$を通り，$\vec{n}=(4,\ 3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2)　点$(-1,\ 3)$を通り，$\vec{l}=(5,\ 7)$ に平行な直線の方程式を求めよ。

(3)　直線　$2x-y+1=0$　の法線ベクトル $\vec{n}$ を 1 つあげよ。

17　ΔOAB があり，$\overrightarrow{OP}=s\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}$ とする。点 P が，



(1)　直線 AB 上にある⇔(　①　)

(2)　線分 AB 上にある⇔(　②　)

(3)　ΔOAB の周および内部にある⇔(　③　)

13

①　AH : HB

②　$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

③　0

④　$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 120°$

$=1\cdot 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

⑤　$\dfrac{5}{7}\vec{a}+\dfrac{2}{7}\vec{b}$

14

(1)　チェバの定理より，

$$\frac{OD}{DA}\cdot\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BM}{MO}=1$$

$\therefore\ \dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{AQ}{QB}\cdot\dfrac{1}{1}=1$

$2AQ=QB$ より，

$AQ:QB=1:2$

(2)　メネラウスの定理より，

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BO}{OM}\cdot\frac{ME}{EA}=1$$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{ME}{EA}=1$

$ME=EA$ より，

$AE:EM=1:1$

(3)①　$\dfrac{1}{2}$　②　$\dfrac{1}{2}$

③　$\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$

15

①　$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

②　$\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

16

(1)　$4(x-1)+3(y-2)=0$

$\therefore\ 4x+3y-10=0$

(2)　$7(x+1)-5(y-3)=0$

$7x-5y+22=0$

(3)　$\vec{n}=(2,-1)$

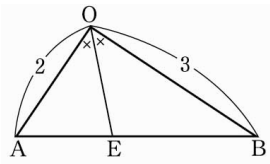
17

①　$s+t=1$

②　$s+t=1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

③　$s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

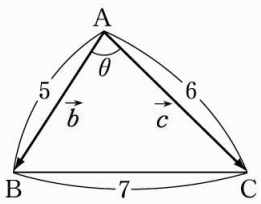
18　下図において，OE は $\angle AOB$ の二等分線である。



(1)　$AE:EB=($　：　$)$

(2)　$\overrightarrow{OE}=($ ① $)\overrightarrow{OA}+($ ② $)\overrightarrow{OB}$

19　右図において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求める方法について考える。



解 1）余弦定理より，

$\cos\theta=$①$\left(\dfrac{\quad}{\quad}\right)=\dfrac{1}{5}$

$\therefore\ \vec{b}\cdot\vec{c}=($　②　$)=5\cdot 6\cdot\dfrac{1}{5}=6$

解 2）$BC=7$ より，$|\vec{c}-\vec{b}|=7$

両辺を平方して，(　③　$)=49$

$\therefore\ 36-2\vec{b}\cdot\vec{c}+25=49$

$\therefore\ \vec{b}\cdot\vec{c}=6$

20　2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$　$\vec{b}=(3,\ -1)$ がある。t を実数とする。

(1)　$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさを求めよ。

解）成分を求めると，$\vec{a}+t\vec{b}=$①$($　，　$)$

$\therefore\ |\vec{a}+t\vec{b}|=($　②　$)$

$=\sqrt{10t^2+2t+5}$

(2)　$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。

解）　$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{10\left(t+\dfrac{1}{10}\right)^2+\dfrac{49}{10}}$　より，

$t=($　③　$)$のとき，最小値(　④　$)$

21　$P(2,\ 4,\ 3)$がある。次の点の座標を求めよ。

(1)　x 軸に関して対称な点 A

(2)　yz 平面に関して対称な点 B

(3)　原点に関して対称な点 C

22

(1)　『条件を満たす x 軸上の点 P の座標を求めよ』ときかれると，点 P をどうおくか。

(2)　『条件を満たす zx 平面上の点 Q の座標を求めよ』ときかれると，点 Q をどうおくか。

23　2 点 $A(2,\ 1,\ 4)$　$B(3,\ -1,\ 5)$について，

(1)　$\overrightarrow{AB}=($　，　，　$)$

(2)　$|\overrightarrow{AB}|=($　　$)$

24

(1)　中心$(1,\ -2,\ 3)$　半径 4 の球面の方程式を求めよ。

(2)　中心$(1,\ -2,\ 1)$，原点を通る球面の方程式を求めよ。

25

球面 $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=25$ …㋐ が xy 平面と交わってできる円の半径を求めよ。

解）　xy 平面の方程式は(　①　)これを㋐に代入すると，$(x-2)^2+(y+3)^2=9$

よって，求める半径は，(　②　)

18

(1)　$2:3$

(2)①　$\dfrac{3}{5}$　②　$\dfrac{2}{5}$

19

①　$\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6}$

②　$|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\theta$

③　$|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$

20

(1)

①　$(1+3t,\ 2-t)$

②　$\sqrt{(1+3t)^2+(2-t)^2}$

(2)

③　$-\dfrac{1}{10}$　④　$\dfrac{7}{\sqrt{10}}$

21

(1)　A(2,−4,−3)

(2)　B(−2，4，3)

(3)　C(−2,−4,−3)

22

(1)　$P(a,\ 0,\ 0)$

(2)　$Q(a,\ 0,\ b)$

23

(1)　$(1,\ -2,\ 1)$

(2)　$\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$

24

(1)

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$

(2)　半径は，

$\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$

$\therefore\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=6$

25

①　$z=0$

②　3