

$$F = k_m \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ の謎}$$

— 磁場 H から磁場 B への展開 —

宮崎県立宮崎西高等学校

溝上俊彦

1. はじめに

高校の物理の教科書には役に立つ公式ばかりが書かれているわけではない。中に科学史上の化石のような公式がある。磁気力を示す

$$F = k_m \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

である。これはクーロンが1785年に静電気力についてのクーロンの法則を発見したときに同時期に発見していたとされるもので「磁気力に関するクーロンの法則」と言われる。 m_1, m_2 は単極の磁気量であり単位は**Wb**である。

しかし、磁気単極子(magnetic monopole)は発見されていない、という現代の物理学の基本からすると明らかにおかしい。そんな江戸時代の式がなぜ日本の教科書に堂々と掲載されているのだろうか。さらにはこの磁気力 F についてのクーロン定数

$$k_m = \frac{10^7}{(4\pi)^2} [\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{Wb}^2]$$

の値はどこからきているのか。実験値でないことはそもそも単極の磁気粒子がないことから明らかだが、なぜそれがこんな人工的な値として定義されているのか。

このレポートは、このもう一つのクーロン定数 k_m の秘密に迫りながら、高校物理の電磁気、特に磁気分野での磁場 H から磁場 B への展開を試みた実践報告である。

2. アメリカの教科書

アメリカの多くの大学で使われる大学教養程度の教科書である「物理学の基礎」では、磁場についての章ではじめに磁場 \vec{B} の大きさを

$$B = \frac{F}{qv}$$

と定義している。一方、電場 E は $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ ($\vec{F}_E = q\vec{E}$) と定義しており、電場 \vec{E} [N/C] は静止した荷電粒子 1 C あたりに働く力、磁場 \vec{B} は荷電粒子の速さ 1 m/s あたり電荷 1 C あたりに働く力として定義していることになる。磁場 B を定義した後、ローレンツ力が $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ の形で出てくる。

日本の教科書では、ローレンツ力が出てくるのはもっと後である。おそらく多くの生徒は「電磁気っていっぱい公式が出てくるなあ」と思ってうんざりしていたところで登場するローレンツ力の式が、磁場の定義となるような重要なものであるとは思わないに違いない。ある国立大学電気電子工学科の教授を父に持つ私の教え子は、高校の時、ここぞとばかりに父に電磁気の質問をした。すると彼の父はいきなりノートに $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ と書き「これがすべてだ」と言い放った。教え子はひっくり返ったという実話がある。

もちろん日本の高校の教科書はこうはなっていない。最初に謎の式 $F = k_m \frac{m_1 m_2}{r^2}$ が出てくる。なぜ単極粒子が存在することを前提にスタートするのだろうか。

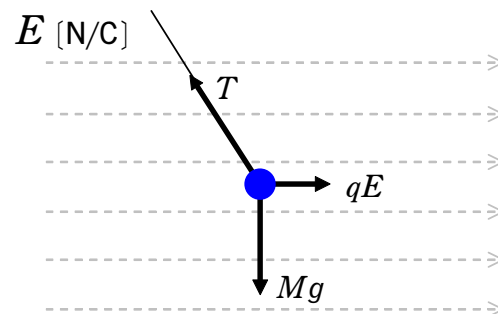
3. 磁界 H [N/Wb] を定義する

まずは教科書に沿って単極粒子の存在を認めることにしよう。生徒たちはそれまでの電場の学習の流れで、電場 E について「空間のある位置に 1C 置いてみたら 3N の力を受けるのであれば、そこは電場 E の大きさが $E=3[\text{N/C}]$ ということ」を知っているとす。このように学んでおけば、同様に単極粒子としての磁場 H [N/Wb] を定義することは難しいことではない。例えば次のような問題を生徒に出すことにしている。ここでは問題の右側に答えとなる作図が描かれてある。

問題 1

水平右向きに一樣な電場 E がある。
この中に $q[\text{C}]$ ($q > 0$) に帯電した質量 $M[\text{kg}]$ の小球を電気を通さない糸でつるした。 E の単位および小球に働く力を書け。

解答

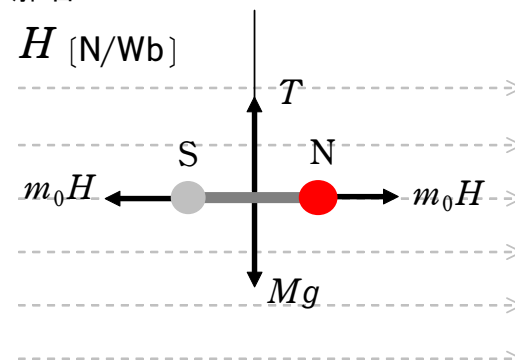


次に磁場 H を「 N 極の磁気の粒 1Wb あたりに受ける力のこと」という約束をして次の問題をやってみる。

問題 2

水平右向きに一樣な磁場 H がある。
この中に磁気量 m_0 [Wb] の NS 棒磁石 (質量 M [kg]) の真ん中を糸でつるした。 H の単位および棒磁石に働く力を書け。

解答



生徒たちは磁場 H の単位 [N/Wb] は、電界 E を理解しているのですぐに書ける。しかしこの問題のポイントは N と S が分離していない棒磁石になっている点である。

N 極や S 極という単極の粒子は現在までまだ？見つかっていない。どんなに磁石を細分化しても N 極と S 極に分けることは無理である。しまいには原子そのものも、原子内の電子に起因する N 極と S 極を持っている。そして電子さえも N 極と S 極をもったようなスピンという量を持っているのだ。中性子や陽子もスピンをもっているが電子よりずっと弱い。自然界は単極の磁気粒子ではなく2つの極（磁気双極子）で構成されている、と言ってもいいだろう。棒磁石の N 極と S 極は分離できないのだ。

4. エルステッドの発見

単極の磁気粒子がないのなら磁場 H の定義は空想上のものということになる。1820年には、磁場 H がどうも電場 E のようには扱えないことを決定づける実験事実が見つかる。これがエルステッドの発見である。

エルステッドは直線電流の周りに磁場が発生していることを偶然見つけた。つまり動く電荷が磁界を生み出すことを見つけるのだが、当時はそれほどすっきり分かっていたわけではないようで、この事実の数理的な表現はビオとサバールによって行われた。その式を直線電流に応用すると

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

という電流 I と磁界 H を結び付ける式が生まれる。高校の教科書では他にもビオ・サバールの法則から計算される結果を使って、円形電流が円の中心につくる磁界やソレノイドコイルがコイル内に作る様な磁界についても併記されている。

しかし、この文脈ではエルステッドの直線電流が磁界を生み出すという発見と、それを定式化したビオ・サバールの法則からの式を強調すべきだろう。

何とんでも、これまでまったく無関係だと思っていたものが結びつくところに物理教育の醍醐味がある。高校物理では例えば単原子分子の運動エネルギーが温度に結びつく。

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$$

このことも衝撃的である。運動エネルギーというものが、いきなり温度という実態と感覚を持って立ち現われる様子は物理の山場の一つだろう。それにも負けない山場がエルステッドの発見である。それまで電流と磁場とは何の関係もない？と思っていたらつながってしまうのである。

ここにきて磁場 H は [N/Wb] という架空の単位から [A/m] という実態を伴った単位を獲得する。つまり磁気単極子 1 Wb の本質を突きとめる段階に来たことになる。

5. 新しい磁場 B の定義

重力場は、質量 m を持っているものが力を受ける空間であるし、電場 E は電荷をもった荷電粒子が力を受ける空間である。ところが磁場 H で主人公になるべき磁気量をもった単極の磁気粒子は行方不明である。これでは磁場 H が定義できない。磁場では何が力を受けているのか。

そこで登場するのが電流 I である。もちろん、電流そのものは荷電粒子の運動であるのだが、まずは電流 I を量としてとらえることにする。図1のように、電流 I がその周りに磁場を作るならば、外部磁場中に電流を流すと、その電流が作る磁場と外部磁場との相互作用が起こるだろう。そして結果的にその電流そのものが力を受けることになる。

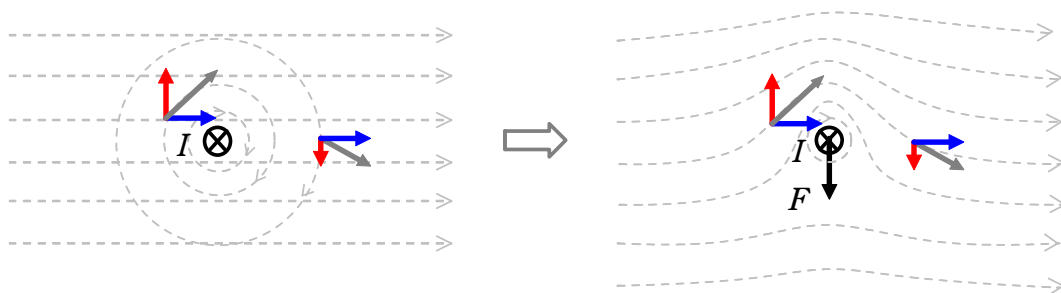


図1 磁場中に電流を流すと電流が力を受けるという現象を、授業では磁場ベクトルの合成により、左の二つの磁場を合成すると右のようになることを予測させる。

それだったら磁場の主人公に電流 I を持ってきてやればいい。この磁場を B と呼んで単位は電流 1A あたりに受ける力を $B[\text{N}]$ ということにする。電流の実態は一次元で伸びている。それなら加えて 1m あたりに受ける力ということにすればよい。

つまり新しい磁場の定義、それも実験事実に沿った無理のない定義ができることになる。磁場 $B[\text{N}/\text{A}\cdot\text{m}]$ の誕生である。

6. B はなぜ磁束密度と呼ばれるのか

磁場 B は、磁場 H を先に定義した流れもあって、教科書では通常、磁場 B と呼ばなくなっている。正式名称は「磁束密度 B 」である。なぜ磁束密度といわれるのか。これは意外にあっけなく証明することができる。

授業では「磁場 H の単位はエルステッドの発見によって二通りあった。このことを使って磁場 B の単位を書きなおい、 B が磁束密度といわれる理由を考察しなさい。」という問題に生徒たちは取り組む。

磁場 B の単位について考えてみる。はじめに定義したように磁場 B とはその空間に電流 I が存在する時、その電流 1 A あたり長さ 1 m あたりに受ける力を B と定義し単位は $B[\text{N/A}\cdot\text{m}]$ となった。ここでエルステッドの発見とビオ・サバールの法則から導かれる直線電流 $I[\text{A}]$ のまわりの磁界 $H[\text{N/Wb}]$ は

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad [\text{N/Wb}] \text{ または } [\text{A/m}]$$

である。つまり単位を考えると

$$\text{N/Wb} = \text{A/m} \quad \therefore \text{N} = \text{Wb} \cdot \text{A/m}$$

すると磁場 B の単位は

$$B[\text{N/A}\cdot\text{m}] = B[\text{Wb}\cdot\text{A}/\text{A}\cdot\text{m}^2] = B[\text{Wb}/\text{m}^2]$$

となって磁場 B は 1 m^2 あたりの磁束数 $[\text{Wb}]$ となる。これが B を磁束密度とよぶ根拠になっている。

7. 1 Wb の正体

つまり行方不明だった磁気量 1 Wb が新しい姿で発見されることになる。磁気量とは磁束 $\phi[\text{Wb}]$ という磁場空間をつくる力線だったのである。

加えて磁束密度 B はもう一つの単位 $[\text{Wb}/\text{m}^2]$ を持つことになり、ビジュアルなイメージを見せるようになる。図2のように、磁場 B は電場 E が 1 m^2 あたりの電気力線の本数を指す「電気力線密度 E 」であるのによく対応し、 1 m^2 あたりの磁束の本数を示すことになる。

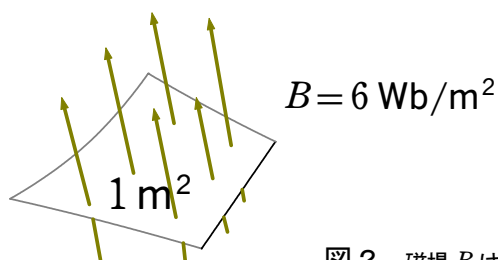


図2 磁場 B は 1 m^2 あたりの磁束 $[\text{Wb}]$ の本数を意味している磁束密度でもある。

8. なぜ磁場 B と H の関係は $B = \mu_0 H$ なのか

ここまでで磁場 B と H の関係を式に表せる段階に来た。よく知られている $B = \mu_0 H$ という関係である。しかし我々は授業では天下り的に $B = \mu_0 H$ をだすだけで、それがどうやって出てくるのかを語ることはほとんどしない。「なぜ $B = \mu_0 H$ という関係がある

んですか」「 μ_0 ってそもそもどこから来ているんですか」という質問に我々はどれだけ答えてきたのだろうか。

しかしこれは平行電流間には互いに力が働く、という事実から出発すると意外に簡単に説明することができる。図3のように実験的に距離 r [m] だけ離れた平行な電流 I_1 [A] と I_2 [A] には互いに力 F が働いているとしよう。

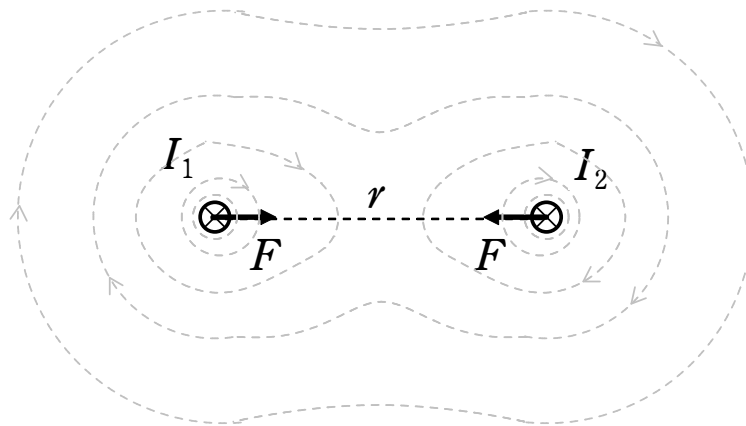


図3 同方向の平行電流がつくる合成磁場。この磁場によって電流は力 F の引力を受ける。

ここまで2つの事実がはっきりしている。一つは、電流 I_2 は I_1 によって作られた磁場 B から力 F を受けている。直線電流の力を受ける長さを l として

$$\vec{F} = l \vec{I}_2 \times \vec{B}$$

電流 I_1 によってつくられる磁場は、エルステッドとビオ・サバールの法則からでてきた式から考えることができる。

$$H = \frac{I_1}{2\pi r}$$

ここで \vec{B} の向きは電流 \vec{I}_2 と力 \vec{F} の向きから考えてなんと \vec{H} の向きと同じになる。大きさはもちろん異なるだろうから

$$\vec{B} = \alpha \vec{H}$$

とおくことにして、この α の大きさを求めることにしよう。はじめの2つの式から互いに距離 r [m] だけ離れた平行間電流 I_1 [A] と I_2 [A] が及ぼし合う力 F の大きさは

$$F = l I_2 B = \frac{\alpha I_1 I_2 l}{2\pi r}$$

と書けることになる。

ここで大変重要な事実が α を決定する理由となる。実は我々は $r = l = 1$ [m] として、この力 F が $F = 2 \times 10^{-7}$ [N] となる電流値を $I_1 = I_2 = 1$ A と定義しているのである。代入す

ると

$$\alpha = 4\pi \times 10^{-7} [\text{N/A}^2]$$

ということになる。これが B と H の大きさの変換量である。この値を μ_0 とおいて真空の透磁率と呼ぶ。 μ_0 は真空中で電流によってつくられる磁場の大きさ調整のための係数である。つまり

$$B = \mu_0 H \quad (\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{N/A}^2])$$

となる。これでめでたく B と H の関係が明確になった。磁場の実験的定義は平行電流間に働く力であり、 B と H を繋ぐ係数もこの実験事実が基になるのである。

9. なぜ $k_m = \frac{10^7}{(4\pi)^2} [\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{Wb}^2]$ なのか

はじめの疑問に戻ろう。磁気におけるクーロンの化石の式 $F = k_m \frac{m_1 m_2}{r^2} \dots \textcircled{1}$ の定数 k_m はなぜ $k_m = \frac{10^7}{(4\pi)^2} [\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{Wb}^2]$ なのか。ようやくこの謎を解決する準備ができた。図4のように N 極の単極粒子 m [Wb] が真空中に固定されているとしよう。

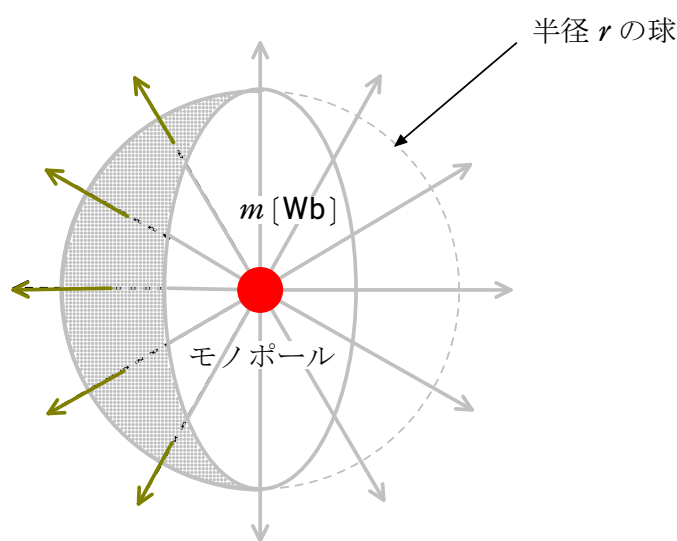


図4

単極粒子から出る磁束の数は m [本] である。これは磁束1本が 1Wb という理論的な要請である。ここで単極粒子から r [m] だけ離れた点の磁界の強さ H は化石の式①より

$$H = k_m \frac{m}{r^2} [\text{N/Wb}]$$

よってその点における磁束密度 B [Wb/m²] は

$$B = \mu_0 k_m \frac{m}{r^2} [\text{Wb/m}^2]$$

半径 $r[\text{m}]$ の球表面からは 1 m^2 あたり $B[\text{本}]$ の磁束が出ていることから、磁気単極子 (magnetic monopole) から出る磁束の総数 $m[\text{本}]$ との関係は

$$4\pi r^2 \cdot B = m$$

よって

$$4\pi r^2 \cdot \mu_0 k_m \frac{m}{r^2} = m$$

$$k_m = \frac{1}{4\pi\mu_0}$$

真空の透磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{N/A}^2]$ を代入して

$$k_m = \frac{10^7}{(4\pi)^2} [\text{A}^2/\text{N}]$$

ここで $\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$ より $\text{A} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{Wb}}$ であるから

$$k_m = \frac{10^7}{(4\pi)^2} [\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{Wb}^2]$$

ということだったのである。これで無事謎は解決した。

10. 最後に

結局、真空の透磁率 μ_0 は、電流 1 A をどのように決めたかで自動的に決まってしまうことになる。電流 I そのものは電気素量が量子化されているため数値としてうまく決定できない。 1 C がおよそ電子何個分かは計算できるが、それを使って電流 1 A を定義するのは常にあいまいさが付きまとうことになる。無限に長い 1 m 間隔の2本の平行電流に 1 m あたり $F = 2 \times 10^{-7} \text{ N}$ の力が働くような電流の大きさを 1 A と定義するほうがずっと精度は上がるのだろう。それによって自動的に真空の誘電率 μ_0 が決まった。

すると磁気のクーロン定数 k_m は、単極の磁気粒子があると仮定してガウスの法則から

$$k_m = \frac{1}{4\pi\mu_0}$$

となってこれまた自動的に決定されることになる。MKS 単位系の基本単位に A (アンペア) があるのはそのためである。 1 A は、 1 m や 1 kg のように人間がある基準で決定する基本量の一つということになる。

しかし、電流が力を受けるということは当然、電流の実態は荷電粒子の流れであるから、速さ v の荷電粒子そのものが力を受けるような場を磁場 B と定義しなおすことが可能になってくる。つまり、提案する磁場 H から磁場 B への展開は、結局、力を受ける主体が磁気粒子から電流になり、そして電流を構成する「動く電荷」が力を受けることになり、

ローレンツ力にたどり着く。アメリカの教科書が磁場の定義を

$$B = \frac{F}{qv} \quad [\text{N}\cdot\text{s}/\text{C}\cdot\text{m}]$$

としているのは当然の帰結といえる。もちろんこの $[\text{N}\cdot\text{s}/\text{C}\cdot\text{m}]$ という単位は電流 I を力を受ける主体にしたときの磁場 B の単位 $[\text{N}/\text{A}\cdot\text{m}]$ と同じものである。

このように考えてくると、日本の教科書は、実はローレンツ力に至る道筋を科学史の流れから無理なく記述する手法を取っていると解釈できる。しかし、授業をする側が教科書の簡潔な記述の裏にその大きな流れがあることを理解していなければ、生徒たちは次から次に出てくる公式に翻弄されてしまうことにもなる。

彼らが大学に進んで電磁気を学習することになれば、最終的にマックスウェルの4つの方程式を理解することが目的になる。この一組の美しい方程式にたどり着かせる準備は、まず高校で我々がしてやる必要があるのではないだろうか。

参考文献

Jearl Walker, Fundamentals of Physics, 8th Edition p.737