算数・数学は、身近な暮らしの中で役立ちます

やってみなくてもわかります

事象を予測・推測する

PROFILE

〈監修〉

矢部 敏昭 やべ としあき（鳥取大学副学長、附属図書館長）

1955年千葉県生まれ。東京都小学校教諭、お茶の水女子大学附属小学校教諭を経て、鳥取大学に勤務する。現在までに、鳥取大学附属教育実践総合センター長をはじめ、附属中学校長、附属学校部長、地域学部長を歴任。日本数学教育学会理事、日本学術会議連携会員、鳥取県教育審議会会長等を務める。

〈連載第5回執筆〉

傍士 輝彦 ほうし てるひこ（東京学芸大学附属世田谷中学校教諭）

東京都教員を経て現職。物理学や工学関連からの題材を工夫し、数学を縦横に使って新たなことを発見できる生徒を育てたいと考えている。

田代 勝 たしろ まさる（東京学芸大学附属大泉小学校教諭）

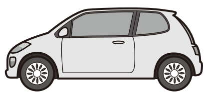
1968年静岡県生まれ。東京学芸大学卒、加藤学園暁秀初等学校（静岡県沼津市）を経て現職。

峰野 宏祐 みねの こうすけ（東京学芸大学附属世田谷中学校教諭）

1986年神奈川県生まれ。横浜国立大学大学院教育学研究科卒。神奈川県立柏陽高等学校教諭を経て現職。

1 子どもたちはこんな場面を算数・数学を使って考えたことがありますか?

車は、急には止まれません。そこで、高速道路を時速100kmで走っている自動車は、前を走る車との間隔をどれぐらい開けて走るべきでしょうか。



先日、放物線学習の導入場面用として、教育実習生が『(自動車の)制動距離』という教材を用意してきました。制動距離とは、自動車が急ブレーキを掛けたとき、ブレーキが効き始めてから止まるまでに走る距離のことです。生徒に次のような表を見せます。

〈ブレーキが効き始めてから止まるまでの距離〉

時速x(km)	制動距離y(m)
0	0
10	1
20	4
30	9
40	16
50	25

「xとyの間に何か関係は?」と質問すると、生徒は比例・反比例や一次関数の学習経験から、

S1：xが2倍、3倍になると……アレレ??

などと考え始めます。そして、時速20kmに対して4m、時速30kmに対して9m、といった対応の様子から、

S2：「2の2乗が4」、「3の2乗が9」、に似ているけど…

S3：ああ、「20の2乗割る100」っていうことじゃない?

などと気付く生徒が出てきます。$y= x^2/100$ すなわち、制動距離の測定結果から、速度と制動距離の関係を表す式が見いだされました。

T1：じゃあ、高速道路を時速80kmで走っている車が急ブレーキを掛けたら、どのくらい走って止まる?

S4：…6400割る100で…64mかあ…結構走るなあ。

T2：時速100kmで走っている場合は?

S5：10000割る100だから100mです。

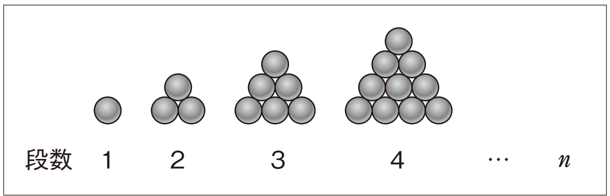
T3：そう、だから教習所では高速道路を時速100kmで走っているとき、前を走る車との間隔を100m以上開けなさいって教わるんですね。

といった会話が成り立つことでしょう。時速80kmで走るときは?時速100kmで走るときは? という教師の発問は、生徒に$y=x^2/100$という制動距離モデルを使って予測することを促す発問、という訳です。実際に走る必要はないのです。また、走れませんね。

今回の話題も、前回に引き続き、算数・数学的に(数理的に)予測する場面のある授業についてです。数理的に予測

するとは、対象の本質や今後の様子を算数・数学的な手法を使って推測する、ということですね。前回は、統計的に調べる、つまり、データ解析という算数・数学的方法で推測・予測しようという例を紹介しました。では、統計的な手法の他にどんなものが考えられるでしょう。前述の制動距離の例のように、例えば規則性を見いだして予測する、すなわち関数的な考え方を利用する、というのがありますね。伴って変わる複数の量を変数として設定し、それらの間に何らかの規則性が見つかれば、他の状況について予測できそうです。

いわゆる『俵積み問題』も、一定の規則性から算数・数学的に予測できる場面の好例です。次の『泥団子並べ』の例では、図から関数的な考えによって規則性を見いだすことで、10段、20段、n段で並べるのに必要な泥団子の数を、実際に並べることなく予測できます。必要な泥団子の数が、算数・数学的に予測できるのです。

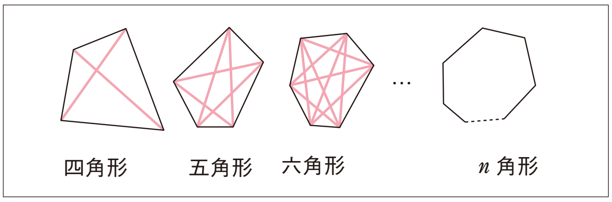


例えば、11段並べるには何個必要か、というとき、計算すれば66個であることが予想できます。実際に並べる必要はないですね。こんな点が、算数・数学的予測の利便性です。この類の問題の場合、計算方法は生徒の考え方そのものに依拠しますから、この問題の場合なら、

$n(n+1)/2$　$(n+1)n/2$　$(n^2+n)/2$　$n^2/2+n/2$

などのnの2次式のアイデアが多数出てきます。これらの正当性の検討が、次の授業の話題となります。

図形の学習においても、同様の数理的予測場面を授業の中に設定できます。例えば、平面図形のn角形の対角線の総数を考察する場面などがそれです。「四角形は2本、五角形は5本ですね。では、六角形は?」と尋ねると、即座に「6本ッ!」と元気な答えが返ってきたりします。五角形が5本だからです。「調べてみるか…」という訳で、早速、次のような図を描きます。



図から、表を作る生徒もいます。様々な考え方によって、$n(n-3)/2$ 本であることがわかります。七角形あたりまでを実際に描いて数えて表にして、表から帰納的(実は演繹的)に求める生徒と、図の共通の特徴から演繹的に導く生徒がいます。いずれの場合も結果は一致、という点がこの教材の持つ数学的醍醐味です。この場合も、描かなくても何角形でも対角線の本数がわかりますね。

『追いかけ算』の場面設定は、算数でも数学でも出てきます。弟は先に家を出て、駅から電車に乗ります。姉が弟の忘れ物を届けるために、後から追いかけます。「姉は何分後に弟に追い付くでしょう」という問題で答えを出したら、先生に「それは間違いだよ。」と言われる。家から駅までの距離が示されていて、距離に直すと駅の先で追い付く、あるいは時間に直すと姉が追い付く前に弟は駅に着いて電車に乗ってしまっている、という結果です。なるほど、だから忘れ物は渡せない、という話です。算数ならばグラフを描くなどして交点について話し合うことができるでしょうし、数学ならグラフ以外にも方程式を解くことで起こるであろう結果を予測できます。歩いてみる必要はありません。

② 算数・数学がこんなにつながります

統計的手法に関連しますが、算数の『平均の利用』の場面も、算数・数学的予測の好例ですね。「今年の桃1個の平均の重さは350gだそうだ。おばあちゃんが昨日発送してくれたのは7kg箱らしいから、20個も入っている!」などと予想する訳です。

でも、この話では、実際に箱を開けてみないと正確な数はわかりませんね。だって、大玉小玉で15個なのかもしれないのですから。

このように、算数・数学的に予測することは可能だが、値が

決定できなかったり、確かめてみないとわからない、という例もあります。そこで、小学校では、教材によっては予想したことが正しいかどうかを確かめることも必要でしょうし、中学校ではその経験を生かして、確認が必要か不要かを見極められるようになることが大切でしょう。姉が弟に追い付くかどうかを、実際に歩いたり走ったりして確かめる訳にもいきませんね。

3-1 こんな展開はいかがでしょう（小学6年：「比例」）

1. 導入

◆ろうそくを見せ、燃焼時間について興味を持たせる。

T：震災に備えて、懐中電灯の電池が切れたときのことも考え、長いろうそくを買うことにしました。

C：長持ちしそう。一晩はもつかな。

C：意外に早く短くなっていくかも。

T：このろうそくが何時間燃え続けられるか、実際にはかることができるかな。

C：学校にいる間にはできないかも。

C：待ち切れないよ。長すぎる。

©PIXTA

2. 課題提示

◆燃え続ける時間とろうそくの長さの関係に注目させる。

T：ろうそくを全部燃やさずに、燃え続ける時間を求めることができるでしょうか。

C：同じペースで燃えていくのだから、できそう。

C：燃え続ける時間とろうそくが燃えた長さが比例していると考えれば、一部をはかって求めることができる。

C：1cm燃えたときにかかった時間がわかるとできる。

C：1時間で何cm燃えるのかがわかるといいね。

C：それだったら、10分で何cmかでもいいはず。

C：比例ではないけど、「10分で何cm残っているか」でもできるよ。

◆数値を提示し、自分の考え方で求めさせる。

T：先生が実際に5分だけ火をつけてみました。そのとき燃えた長さをはかると3mmでした。

C：もとの長さがわかれば、時間が求められるよ。

長さが22cmのろうそくがあります。
5分で3mm燃えるとき、燃え続ける時間を求めましょう。

3. 自力解決

◆単位量あたりの考えを用いて、式を考えるために、関係図や数直線図、表などを作成して、時間を求める。

①1分あたりに燃える長さを出してから求める。

$3 \div 5 = 0.6$

1分あたり0.6mmずつ燃える。

$\boxed{0.6\text{mm}} \longrightarrow \boxed{220\text{mm}}$

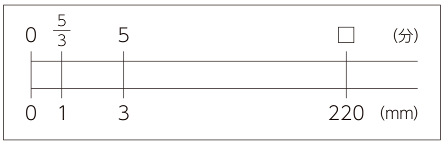
1分　□分

②1mmあたりにかかる時間を出してから求める。

$5 \div 3 = \frac{5}{3}$

1mmあたり

$\frac{5}{3}$分かかる。



③5分で3mmずつ長さが減る考え方で求める。

時間（分）	0	5	10	15	□
高さ（mm）	220	217	214	211	0

4. 発表・話し合い

◆式を板書させて、その意味を話し合わせる。板書していない児童に説明させることも効果的である。

① $220 \div 0.6 = 366.66\cdots$　② $\frac{5}{3} \times 220 = \frac{1100}{3}$　③ $220 \div 3 \times 5 = \frac{1100}{3}$

C①：1分あたり0.6mm燃えるので、長さを0.6で割って、何分かかるか考えました。6時間6分20秒です。

C：②の人は、1mmあたり何分かかるかで考えたんだ。

C：③の人は、長さが減っていくことを考えたけど、式だけ見れば、意味は違うけどどれも似ているね。

C：結局同じ答えになったね。6時間くらいだから、とても一晩中はもたないことがわかった。

◆比例関係から、実際にははかりにくい時間を求められたことを確認する。

5. たしかめ

◆しばらく燃やして、減っていく様子を見る。残りは、燃え尽きるまでをビデオで撮影しておき、早送りで時間を確かめる。

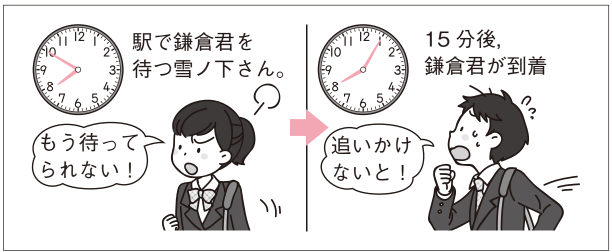
C：本当に同じペースで燃えていくね。比例を使えば、全部はからなくても、時間を求めることができるんだ。

◆予測が正しかったことを実感する。児童の必要感に応えるため、実際に6時間燃やした映像を見せてもよい。

3-2 こんな展開はいかがでしょう（中学2年：「連立方程式」）

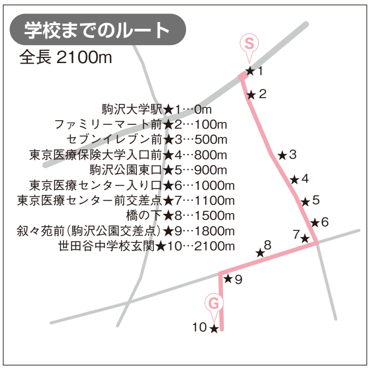
日常生活で何かを予測するとき、「大体これくらい」といった経験則が頼りになります。しかし、経験則は意外と曖昧で、「見通しが外れて、時間に遅れてしまった…」などということも少なくありません。そこで、追いかけ算の場面から、「何となく(直感)」の予測を、数学をもとに見直し修正していく事例を紹介します。

1.【導入】鎌倉君は雪ノ下さんに追い付くか？



学校の最寄り駅で友人の鎌倉君を待つ雪ノ下さん。待ち切れない雪ノ下さんは先に学校に向かいます(7:50)。鎌倉君はその後8:05に駅に到着しますが、既に雪ノ下さんはいません。鎌倉君は走って追いかけますが…。

さて、鎌倉君はどのあたりで追い付くでしょうか。そもそも追い付くのか?登校時刻(8:30)に間に合うのか?いろいろな問いが考えられます。生徒たちは経験があるので「このくらいで追い付くんじゃないかなあ」などと予想するでしょう（右のような通学路の地図を見せながら。学校によって馴染みのある道を設定するとよいです）。



2.【展開①】仮定を設定し、解決へ

どのあたりで追い付くかを予想させ、実際どうなのか数学を使ってシミュレーションしてみることにします。それには、仮定の設定が必要です。歩く速さを70m/分(4.2km/時、普通の速さ)、走る速さは150m/分(9km/時、ジョギング程度)と、生徒とのやりとりで設定します。この仮定を設定することが、後に解決を深めていく上での肝になります。追い付く距離をx(m)とおくと、

$$\frac{x}{70}=\frac{x}{150}+15 \iff x=1968.75\,(\mathrm{m})$$

となり、2100m地点にある学校の少し手前でしか追い付けないことがわかります。もっと早く追い付くと予想していた生徒にとっては、ガッカリな結果です。

3.【展開②】もっと頑張ったら…

走る速さ150m/分は、さほど速いわけではありません。もっと頑張って雪ノ下さんと一緒に行く時間を増やしたいところですが、果たして、どの地点で追い付けるでしょうか。生徒に予想させると、結構幅が出ます（地図の★4～7あたり）。それぞれの地点で、今度は「速さ」「時間」を変数におき、解決を試みます。

解決する中で、★4～6で追い付くことはあり得ないと気付きます。雪ノ下さんの歩く速さが70m/分だと、鎌倉君が出発するまでの時間差15分の間に1050m進むので、1000m地点(★6)は、もう通り過ぎています。ということは、もっと先でしか追い付けません。

では1100m地点(★7)で追い付くには、鎌倉君の走る速さをx(m/分)、追い付く時間をy(分)とおくと、

$$xy=70(y+15)=1100 \iff x=1540\,(\mathrm{m/分})$$

となります。これは人間ではあり得ませんね。100mを10秒で走る(600m/分)と仮定すると、約1189mで追い付くという解が得られますが、それも実際には不可能ですね。

4.【まとめ】直感による予測を、数学で裏付ける

結果、どんなに頑張っても15分のタイムラグを埋めるのは難しいことが見えてきます。「何となく(直感)」の予測だったものが、数学(論理)の裏付けを通して明確になっていく、すなわち予測の質が上がっていくといえます。その際に重要なのが仮定の設定です。仮定をどう設定するかでも、予測の質が変わってきます。