

平成24年度

大学入試センター試験 および 国公立大二次・私大

大学入試

分析と対策

数学

学校法人 河合塾
数学科講師 福眞 剛司

林 啓林館

この冊子の内容は次のURLからもアクセスできます
<http://www.shinko-keirin.co.jp/kosu/index.htm>

本稿ではいくつかの入試問題を引用していますが、紙面の都合上、設問の一部を省略したり、表現を改変したりした箇所があります。

なお、大学入試センター試験の問題はトピックスが多いため、問題文の引用をしていません。二次試験、私大の試験でも問題文を引用していない箇所があります。問題文については河合塾のホームページなどをご覧ください。

0. はじめに

平成24年度の大学入試が終了した。センター試験では、理科、地歴・公民の受験のシステムが大幅に変更されたことにより大混乱があったことは記憶に新しいが、二次試験、私大入試は大きな問題もなく終了したようである。昨年の受験期に起こった東日本大震災からの復興は、まだ十分なされていないと言いが、被災地にも徐々にではあるが再興の兆しが見えている。ここで改めて被災地の復興を心よりお祈りしたい。

さて、今春より次期学習指導要領が学年進行で実施されることになり、その課程での大学入試が（数学については）平成27年度から始まることとなる。それに伴って少しずつではあるが変化の兆しが見られるようである。

その観点から今後の受験生指導の参考とすべく、平成24年度の大学入試問題を分析していきたい。なお、以下において、「今年度」とは平成24年度、「昨年度」とは平成23年度、「来年度」とは平成25年度を指す。

1. 大学入試センター試験

ここでは、大学入試センター試験（以下、「センター試験」）本試の『数学Ⅰ・数学A』および『数学Ⅱ・数学B』の2科目（以下、『数ⅠA』『数ⅡB』と略記）のみの分析を行うこととする。

以下、いくつかのトピックスに分けて今年度のセンター試験を分析したい。

①難易度の変化

出題分野、大問ごとの配点等は昨年度とほとんど変わっていない。ここでは、現行学習指導要領によるセンター試験（過去6年分）の平均点と標準偏差をまとめてみることにする。

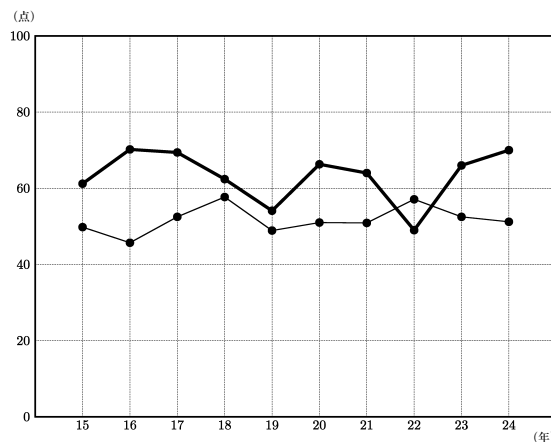
『数ⅠA』

年度	平均点	標準偏差
平成24年度	69.97	19.98
平成23年度	65.95	20.52
平成22年度	48.96	19.63
平成21年度	63.96	22.12
平成20年度	66.31	23.55
平成19年度	54.06	18.60
平成18年度	62.36	21.70

『数学ⅡB』

年度	平均点	標準偏差
平成24年度	51.16	19.90
平成23年度	52.46	24.08
平成22年度	57.12	23.20
平成21年度	50.86	19.35
平成20年度	51.01	21.10
平成19年度	48.94	23.92
平成18年度	57.66	23.52

本年度を含めて、過去10年間の平均点の推移をグラフで見ると以下ようになる。ただし、太線が『数ⅠA』、細線が『数ⅡB』の平均点を表している。



『数ⅠA』は昨年より平均が増加したが、『数ⅡB』はほぼ昨年並みであった。ただし、『数ⅡB』の標準偏差が昨年より激減しており、点差のつきにくい試験であったことが読み取れる。

また、何回かの例外を除いて、2科目の平均を加えるとおおよそ120点となっていることもわかる。詳しくは次項以降で分析したい。

②答案再現分析

河合塾では、センター試験終了後「答案再現分析」を実施している。これは受験生および高校の先生等にご協力をいただいて、受験生がどの問題にどのマークをしたかを調査したものである。今年度は11,147件の回答を得、『数ⅠA』で9,536件、『数ⅡB』で9,122件のデータを収集した。

数学のセンター試験においては、直前の設問の結果を用いて解答していくことが多いので、どの問題で正答率が低下したかを見ることで、受験生の弱点の傾向がわかることが多い。ここで、ご協力いただいた受験生および先生方に改めて感謝し、このデータを分析の一つの観点として利用することとする。

なお、答案再現分析による平均点は『数ⅠA』で76.3点、『数ⅡB』で56.5点であった。答案再現分析により抽出された標本は、全母集団に比べてやや上方に分布しているものであることをあらかじめご了解いただきたい。

まず、各問題ごとの平均得点率（各問題の満点に対する得点の割合）を見ていくことにする。なお、受験生全体の平均については、（ ）内に昨年度のデータを付し、対前年比較の参考とする。

『数ⅠA』

大問	配点	全体 (%)	現役 (%)	高卒 (%)
1 [1]	10 (10)	94.0 (66.0)	94.0	95.0
1 [2]	10 (10)	54.0 (66.0)	54.0	59.0
2	25	72.8 (73.2)	70.8	77.6
3	30	74.0 (75.0)	72.3	78.3
4	25	84.0 (73.6)	83.2	86.4

第4問（場合の数と確率）の得点率が昨年度よりもかなり増えていることが平均点を押し上げた原因のひとつだろう。

『数ⅡB』（第5問以降は省略）

大問	配点	全体 (%)	現役 (%)	高卒 (%)
1 [1]	15 (15)	84.6 (55.3)	82.6	90.0
1 [2]	15 (15)	23.3 (86.0)	22.0	28.0
2	30	67.7 (58.7)	65.7	73.0
3	20	62.0 (33.0)	59.0	70.0
4	20	39.5 (64.5)	37.5	44.0

第1問の [1] と [2] は昨年度と出題分野が入れ替わっているもので、昨年度分を今年度のものに合わせて変更した。

昨年度と比べ、第1問 [2]（三角関数）の正答率、第4問（ベクトル）の正答率が激減し、そのかわりに第1問 [1]（指数・対数）と第3問（数列）の正答率は大幅に上がった。現役生と高卒生の得点率の差は、第3問で最大となった。

③問題分析

次に、各問題についていくつかのコメントを述べておくことにする。なお、以下のコメント中の正答率は、前節で述べた「答案再現分析」をもとにしている。なお、偏差値帯 45.0～54.9 に属する受験生を「中位生」とし、それより上位の生徒を「上位生」、下位の生徒を「下位生」としている。

まず、『数ⅠA』について。

第1問 [1] は「方程式と不等式」から絶対値記号を含む不等式が出題された。やさしい問題で、現役、高卒とも9割程度の正答率がある。最後の設問の下位生の正答率は7割前後であった。

第1問 [2] は「集合と論理」からの出題で、3つの条件の強さについて吟味する問題であった。文字定数 k が含まれているので、かなり解きにくい問題であったと思われる。 k の正答率は7割程度であるが、他の問題は4～5割の正答率にとどまっている。

第2問は「2次関数」からの出題であり、2次関数の基礎的な知識を問う問題であった。**コサ**はいわゆる「解の分離」の問題であるが、下位生の正答率は3割を下回っている。2次関数の知識としては標準的なものであるから演習により理解させたい。数学Ⅱの内容になるが、解と係数の関係を用いる方法も有効である。**シス**、**セ**の最小値に関する問題は、頻出だけあって全体の正答率は6割を超えている。下位生の正答率はやはり3割を下回っている。

第3問は「図形と計量・平面図形」からの出題であった。前半は標準的な問題であり、内接円の半径を求める問題(**クケ**)まではほぼ9割以上の正答率である(下位生の**クケ**の正答率は5割強である)。後半は、やや細切れ感のある問題が並んでいる。全体の正答率は**シス**で6割弱、**ツテ**で4割弱であった。

第4問は「場合の数・確率」の問題であった。設定は頻出パターンをほんの少し外してあるが、解きやすい問題であった。正答率はかなり高く、**テト**でも7割をやや下回る程度であった。下位生は**センソタ**以降の正答率が3割を下回っている。問題文を正確に読めば決して難しくなく、演習問題としては良問である。

次に、『数ⅡB』について分析する。

第1問 [1] は「指数関数・対数関数」から、底に文字定数 a を含む単純な対数不等式が出題された。底の変換公式も必要のないごくやさしい問題であり、正答率は8割以上であった。下位生の正答率は**ク**で最低となった。真数条件の処理を練習させたい。なお、不等号を選ぶ問題が出題されている。

第1問 [2] は「三角関数」からの出題である。センター本試験の問題としてはかなりの難問に属するだろう。全体の正答率は**センソ**以降ほぼ25%を下回っている(**タ**のみ3割強)。上位生でも、**センソ**、**タ**の正答率は6割程度であった。この問題に時間をとられてしまった生徒は以降の問題でかなり焦ることになったと思われる。

第2問は「微分法・積分法」からの出題である。放物線と3次関数のグラフが接する条件から2次関数の係数を決定し、以降その2次関数のグラフについて考察する。下位生の正答率は序盤(接線の方程

式)から6割強であり、2曲線が接する条件になると6割を下回ってしまう。得点差がついたのは**ト**の設問で上位生と下位生の正答率の差は75ポイント程度ある。やや計算量の多い問題であった。

第3問は「数列」からの出題である。等差数列の計算から始まり、最終的には $a_{n+1} = pa_n + qn + r$ 型の漸化式について考察する。**ス**までは正答率が高く、ほぼ8割以上であるが、**セ**以降は6割を下回っている。最初の部分の数値はやや煩雑さが見られるが、二次試験の問題としては標準的な問題であるから、受験期の練習問題としては最適であろう。

第4問は「ベクトル」からの出題である。計算量は例年以上に多いので、第1問 [2]、第2問に時間をとられた受験生は慌てることになったかも知れない。内積の比について議論するという、設定としては面白い問題であった。正答率は**キク**以降ほぼ4割以下(無回答率も1割~3割)となっている。

④センター試験の学習対策

上記で見たように、問題によって難易度に極端な差がある可能性があるので苦手分野を作らないことが最大の対策である。特に、図形問題に苦手意識をもつ生徒が多いので、年間計画の中で少しずつ難しい問題にチャレンジさせていくとよいと思われる。

出題の内容としては、ここ数年来、二次試験などでよく問われるテーマが問われるようになってきている。余裕のある生徒には二次試験の対策問題集などにも取り組ませておきたいところである。

また、特に『数ⅡB』は時間が足りないという生徒が多く見られる。時間配分の練習などもしておかないと、今年の『数ⅡB』のような問題が出題された場合は、実力が出し切れない場合もある。まず解ける問題を素早く解く、という指導も大切である。

多少の煩雑な計算ならばやっけてのけるだけの計算力は必要であるが、正しく速く効率的に数式を処理する力も身につけさせたい。

2. 二次・私大入試の総括

本項では、今年度実施された二次試験、私大入試の問題を分析した結果、学習指導要領改訂に関わる

ものに関し、目立った項目について所見を述べたい。

①行列・1次変換の出題

次期学習指導要領による入試では、「行列」が出題される可能性はなくなったため、この分野が出題されるのはあと2年ないし3年となる。

次の佐賀大の問題は、行列と確率を組み合わせた問題である。(1)はケーリー・ハミルトンの定理(とほぼ同じ内容)を示す問題となっている。

サイコロを4回投げて、1, 2, 3, 4回目に出た目をそれぞれ a, b, c, d とするとき、行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \text{で定める。}$$

- (1) $A^2 - (a-d)A - (ad-bc)E = O$ を示せ。
- (2) n を2以上の自然数とするとき、 $A^n = O$ が成り立つための必要十分条件は、 $ad = bc$ および $a = d$ が成り立つことである。これを示せ。
- (3) n を2以上の自然数とする。 $A^n = O$ となる確率を求めよ。

行列の n 乗に関する問題も多かった。愛媛大では、与えられた行列 A を

$$XY = YX = O, X^2 = X, Y^2 = Y$$

を満たす行列 X, Y を用いて $A = aX + bY$ の形で表し、 n 乗を求めるというタイプの問題(いわゆる「スペクトル分解」)が出題されている。行列の n 乗の求め方にはいろいろな方法があるが、一通りは扱っておきたい。

次の群馬大の問題では、 2×2 行列以外の積を扱っている。特に1行2列の行列は、なじみのない生徒も多いと思われるので、何題かは練習しておきたい。

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{とする。}$$

- (1) $(0 \ 1)A^k B^l \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^{k+l-m}$ を満たす自然数の組 (k, l, m) を求めよ。

多くの大学では、「点の移動」という建前を崩さないように問題文に工夫がされているが、今年度は旭川医大で円の像を考える問題が出題されている(この問題は、いわゆる相似変換に関するものである。一度扱っておきたい)。

なお、1次変換による図形の像を求める際には、「もとの図形の方程式を媒介変数で表してその像を求め、媒介変数を消去する」という方法が多く採られているが、可能ならば、逆行列を用いて図形の像を求める方法を扱っておいた方がよいだろう。

最後に、次の東北大の問題を挙げておく。

座標平面上で直線 $y = x, y = mx$ に関する1次変換をそれぞれ f, g とする。

- (1) g を表す行列 A を求めよ。
- (2) $g \circ f$ を表す行列 B を求めよ。
- (3) $B^2 = E$ となる m をすべて求めよ。

対称移動の1次変換を表す行列の問題である。有名な問題であるが、練習不足のためか完璧に答えられる受験生は少ない。 $y = mx$ という一般的な形で扱っておきたい。また、 $m = \tan \theta$ とおいたときに A はどう表されるかについても一度は扱っておくべきだろう。

②整数問題

整数に関する出題も目立った。

次期の学習指導要領では、「整数の性質」という単元が数学Aに新設された。数学Aは平成11年公示の指導要領と同じく、分野を選択して学習することとなっている。「新指導要領において、たとえ出題範囲に数学Aを含まなくても、この程度は出題するよ」という大学側からのメッセージと受け取っておきたいところである。

さて、整数問題で最も目立つ問題は、次の関西大の問題のような、剰余系に関するものである。

a, b, c を正の整数とする。

- (1) a^2 を3で割った余りは0または1であることを示せ。

- (2) $a^2 = b^2 + c^2$ のとき abc は 3 の倍数であることを示せ。
- (3) $a^2 + b^2 = 225$ を満たす a, b の値を求めよ。

東大では以下のような問題が出題されている。一見当たり前のように思えるが、示そうとすると少し戸惑う問題である。

n を 2 以上の自然数とする。自然数の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。

- (1) 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。
- (2) 連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

次に、不定方程式の問題も多かった。次の一橋大の問題を一例として挙げておく。

1 つの角が 120° の三角形がある。この三角形の 3 辺の長さ x, y, z は $x < y < z$ を満たす整数である。

- (1) $x + y - z = 2$ を満たす x, y, z の値をすべて求めよ。
- (2) $x + y - z = 3$ を満たす x, y, z の値をすべて求めよ。
- (3) a, b を 0 以上の整数とする。 $x + y - z = 2^a 3^b$ を満たす x, y, z の組の個数を a, b で表せ。

$x^2 + y^2 = z^2$ を満たす整数 x, y, z は「ピタゴラス数」と呼ばれるが、上記のような x, y, z は「アイゼンシュタイン数」と呼ばれるそうである。(2) まで決して難しくないので、新課程以降、出題される可能性がある。

名古屋大では次のような問題が出題されている。

m を正の奇数とする。

- (1) $(x - 1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。
- (2) p を正の整数とすると、 $(p - 1)^m + 1$ は p で割り切れることを示せ。
- (3) r を正の奇数とし、 $s = 3^{r-1} m$ とする。 $2^s + 1$

は 3 で割り切れることを示せ。

上記は文系の問題であるが、理系はさらに小問が一つ付け加わっている。

いずれにしても、新教育課程においては教科書で整数分野を学習することができるようになり、この分野の知識を体系的に得ることができるようになる。ただし、高校 1 年生の段階で解ける入試問題はごくわずかであることを注意し、3 年間を通じて計画的に問題を取り上げていくとよいだろう。

③立体幾何に関する問題

新課程の数学 A の「図形の性質」では立体図形も扱うことになっている。この分野の出題もいくつかあったが、以下の 2 問を紹介する。

まず、京都大の問題。余弦定理を繰り返し用いて解くことができる。

正四面体 $OABC$ において、点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上（両端を除く）にとる。三角形 PQR が正三角形ならば、3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを示せ。

次に名古屋市立大の問題。即答できる受験生は少ないだろう。

一辺の長さが a の正八面体の体積と、この正八面体に内接する球、外接する球の半径を求めよ。

このような問題は、ある程度道具が揃ってから、いろいろな方法で扱うことが望ましい。したがって、3 年生の演習の時間などを使って取り組ませるとよいだろう。

④公式の証明問題

今年も基本公式等の証明問題が出題されている。一例を以下に挙げる。

- いわゆる 1/6 公式（秋田大）
- 相加相乗平均の関係（公立はこだて未来大・大阪教育大）

- 楕円上の点における楕円の接線の公式(香川大)

また、今年の入試問題では、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に対して

$\sin \theta < \theta < \tan \theta$ を示す問題が目立った。教科書通りに解答するとすれば、面積を利用して証明することになる。微分法を用いて証明する方法には疑問を唱える人もいるので、教科書の証明を丁寧に扱っておきたい。

公式を使いこなす力だけでなく、公式を自分で証明したり、定義を正しく理解したりする能力が問われていると考えられる。

⑤その他の問題

次の名古屋工業大の問題は、多項式の剰余、積分、行列、数列などさまざまな分野の融合として面白い。

a, b は定数で $a \neq 0$ とする。自然数 n に対して、整式 $(ax + b)^n$ を $x^2 + 1$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とし、

$$I_n = \int_0^1 \frac{(ax+b)^n}{x^2+1} dx \text{ とおく。}$$

- (1) 行列 A はすべての n に対し、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$
 を満たす。行列 A を求めよ。
- (2) (1)の行列 A に対し、 $A^2 + pA + qE = O$ となる定数 p, q を a, b で表せ。
- (3) (2)の p, q に対し、定積分 $I_{n+2} + pI_{n+1} + qI_n$ を求めよ。
- (4) $a = 1, b = -1$ のとき I_5 を求めよ。

(4)の I_5 程度であれば、 $\int_0^1 \frac{(x-1)^5}{x^2+1} dx$ を直接計算した方が早いですが、(1)～(3)の流れはいろいろ考えさせられる。

3. 京都大の出題

平成19年度から一昨年度まで、京都大では理系の問題を、受験する学部・学科により、甲(標準)または乙(やや難)の2セット出題していたが、昨年度からすべての理系学部で同一内容の試験が行われている。来年度以降、どのような形になるかは予

断を許さない。

また、最近しばしば大問□で独立小問2つからなる出題が見られるが、昨年度、今年度は文理とも小問集合で出題されている。また、文系④と理系⑤は二つの命題 $(p), (q)$ の真偽を判定する問題であり、小問集合と言えなくもない。そのうちの (p) は文理共通であるが、面白い問題であるから以下に挙げる。

次の命題が正しければ証明し、正しくなければ反例を挙げよ。

- (p) 正 n 角形の頂点から3点を選んで内角の1つが 60° である三角形を作ることができるならば、 n は3の倍数である。

また、京都大では、学習指導要領によらない独自の出題範囲(以下「固有分野」)を募集要項に示している。今年度の問題では、文系の□(1)で4次式の積分が出題されている。

(数ⅡBまでを出題範囲とする大学で微積分の次数を逸脱した例は名城大(薬学部)などがある。新課程においては、次数制限が緩和されているので、今後、文系生にも次数制限を超えた内容を指導すべきであろう。)

今後の対策としては、文系の生徒に対しては体積、理系の生徒に対しては微分方程式、曲線の長さを中心として固有分野を一通り学習しておくのが望ましい。

ただ、京都大は、学習指導要領の範囲で十分に興味深い問題を出題できる大学であるから、新課程入試においては、このような「はみ出した」出題の是正を期待したいところである。

4. 終わりに

いよいよ新課程が実施される。今春入学する生徒は中学1年時から移行措置として新課程の内容を学習している。メディアでは「脱ゆとり」と報じられた教育課程であるが、どのような生徒が入学してくるかが注目される。中学校での新課程の指導では、基本事項の習熟にける時間が不足する可能性があ

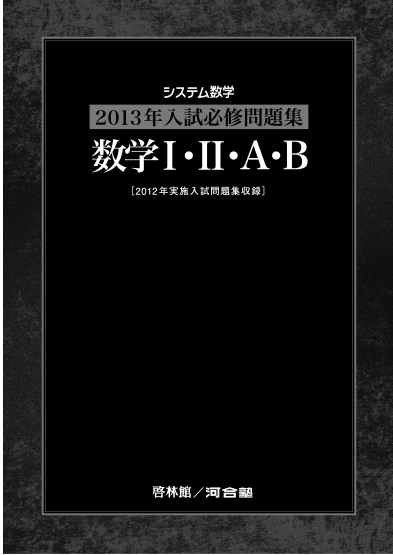
り、高校での指導にも注意が必要である。基本は繰り返し練習し、定着を図らなければならない。それが新課程入試に問題なく対応するための現時点における最良の対策である。

3月になって、各大学から新課程入試の出題範囲が徐々に発表されているが、数学Aの全分野を出題範囲とする大学もあるようだ。数学Aは全単元について、入試に必須と思われる内容は指導しておくべきだろう。そのためには現行課程入試として出題されている内容を適切に分析することが必要である。今回のレポートは、その点に注意して執筆したつもりである。河合塾としても、今後もあらゆる機会を通じて高校の先生方に情報を提供していきたい。

■福眞剛司（ふくま・つよし）

河合塾にて高1～高3、大学受験科で標準レベルからトップレベルの授業を幅広く担当。教材では全国テキスト、マーク模試作成を担当。

著書：「マーク式基礎問題集13 数学I・A [1問1わざ]」（河合出版）〈共著〉



システム数学
2013年入試必修問題集
数学I・II・A・B
〔2012年実施入試問題集収録〕

啓林館／河合塾

改訂

国公立二次・私大入試対策の決定版！

システム数学

2013年入試必修問題集

数学I・II・A・B

数学III・C

- 見開き構成で豊富な問題数を収録
- 2012年入試問題を使用した総合演習

〔A5判〕



理数教育の未来へ
啓林館

URL <http://www.shinko-keirin.co.jp/>

〒543-0052	大阪市天王寺区大道4-3-25	TEL.06-6779-1531	FAX.06-6779-5011
〒113-0023	東京都文京区向丘2-3-10	TEL.03-3814-2151	FAX.03-3814-2159
〒003-0005	札幌市白石区東札幌5条2-6-1	TEL.011-842-8595	FAX.011-842-8594
〒461-0004	名古屋市東区葵1-4-34 双栄ビル2F	TEL.052-935-2585	FAX.052-936-4541
〒732-0052	広島市東区光町1-7-11 広島CDビル5F	TEL.082-261-7246	FAX.082-261-5400
〒810-0022	福岡市中央区薬院1-5-6 ハイヒルズビル5F	TEL.092-725-6677	FAX.092-725-6680