平成23年度

大学入試センター試験 および 国公立大二次・私大

大学入試
分析と対策

数 学

学校法人　河合塾
数学科講師 福眞 剛司

啓林館

この冊子の内容は次のURLからもアクセスできます
http://www.shinko-keirin.co.jp/kosu/index.htm

本稿ではいくつかの入試問題を引用していますが，紙面の都合上，設問の一部を省略したり，表現を改変したりした箇所があります。
なお，大学入試センター試験の問題はトピックスが多いため，問題文の引用をしていません。二次試験，私大の試験でも問題文を引用していない箇所があります。問題文については河合塾のホームページなどをご覧ください。

0. はじめに

平成23年度の大学入試が終了した。全国的な大雪に見舞われたセンター試験，インターネットを利用したカンニング騒動など，受験生に不安と動揺を与えた今年度の入試であったが，後期試験の最中に発生した東日本大震災，それに続く長野県北部，静岡県東部の大地震は，多くの受験生に大きな影響を与えた。
筆者は過去，宮城県や長野県に住んでいたので，今回の災害は衝撃的であり，事態の推移を注視しているところである。被害に遭われた多くの方に心からお見舞いを申し上げ，被災地の一日も早い復興を期待したい。
さて，来春より次期学習指導要領が学年進行で実施されることになり，その課程での大学入試が（数学については）平成27年度から始まることとなる。それに伴って少しずつではあるが変化の兆しが見られるようである。
その観点から今後の受験生指導の参考とすべく，平成23年度の大学入試問題を分析していきたい。なお，以下において，「今年度」とは平成23年度，「昨年度」とは平成22年度，「来年度」とは平成24年度を指す。

1. 大学入試センター試験

ここでは，大学入試センター試験（以下，「センター試験」）本試の『数学Ⅰ・数学A』および『数学Ⅱ・数学B』の2科目（以下，『数ⅠA』『数ⅡB』と略記）のみの分析を行うこととする。

以下，いくつかのトピックスに分けて今年度のセンター試験を分析したい。

①難易度の変化

出題分野，大問ごとの配点等は昨年度とほとんど変わっていない。ここでは，現行学習指導要領によるセンター試験（過去6年分）の平均点と標準偏差をまとめてみることにする。

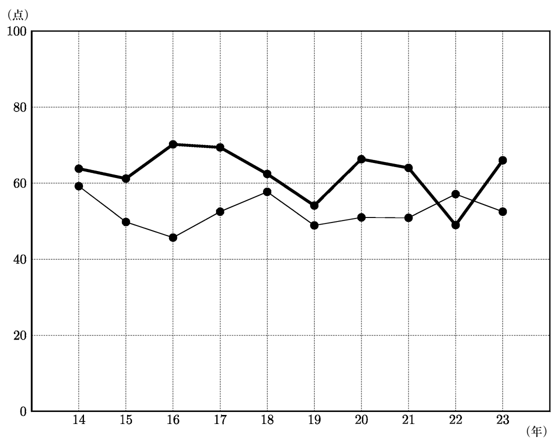
『数ⅠA』

年度	平均点	標準偏差
平成23年度	65.95	20.52
平成22年度	48.96	19.63
平成21年度	63.96	22.12
平成20年度	66.31	23.55
平成19年度	54.06	18.60
平成18年度	62.36	21.70

『数ⅡB』

年度	平均点	標準偏差
平成23年度	52.46	24.08
平成22年度	57.12	23.20
平成21年度	50.86	19.35
平成20年度	51.01	21.10
平成19年度	48.94	23.92
平成18年度	57.66	23.52

本年度を含めて，過去10年間の平均点の推移をグラフで見ると以下のようになる。ただし，太線が『数ⅠA』，細線が『数ⅡB』の平均点を表している。



昨年度は『数ⅠA』の平均点が『数ⅡB』を下回ったが，今年度は例年通り『数ⅡB』の平均点が上回ることになった。また，何回かの例外を除いて，2科目の平均を加えるとおおよそ120点となっていることもわかる。

さらに，『数ⅠA』も『数ⅡB』も標準偏差が昨年に比べてやや増えている。上位生と下位生の点差が開いていく，いわゆる「二極分化」の傾向も読み取れる。詳しくは次項以降で分析したい。

②答案再現分析

河合塾では，センター試験終了後「答案再現分析」を実施している。これは受験生および高校の先生等にご協力をいただいて，受験生がどの問題にどのマークをしたかを調査したものである。今年度は11,048件の回答を得，『数ⅠA』で 9,452件，『数ⅡB』で 8,997件のデータを収集した。

数学のセンター試験においては，直前の設問の結果を用いて解答していくことが多いので，どの問題で正答率が低下したかを見ることで，受験生の弱点の傾向がわかることが多い。ここで，ご協力いただいた受験生および先生方に改めて感謝し，このデータを分析の一つの観点として利用することとする。

なお，答案再現分析による平均点は『数ⅠA』で72.4点，『数ⅡB』で 58.1点であった。答案再現分析により抽出された標本は，全母集団にくらべてやや上方に分布しているものであることをあらかじめご了解いただきたい。

『数ⅠA』

大問	配点	全体（%）	現役（%）	高卒（%）
1［1］	10 (8)	66.0 (86.2)	64.0	69.0
1［2］	10 (12)	66.0 (57.5)	65.0	67.0
2	25	73.2 (78.8)	71.2	80.4
3	30	75.0 (39.3)	73.7	78.0
4	25	73.6 (36.0)	71.6	79.6

まず，各問題ごとの平均得点率（各問題の満点に対する得点の割合）を見ていくことにする。なお，受験生全体の平均については，（　　）内に昨年度のデータを付し，対前年比較の参考とする。

『数ⅠA』については，第3問（図形と計量）および第4問（場合の数と確率）の得点率が昨年度よりもかなり増えていることが読み取れる。これが平均点を押し上げた原因であることがわかる。

『数ⅡB』（第5問以降は省略）

大問	配点	全体（%）	現役（%）	高卒（%）
1［1］	15 (18)	86.0 (61.1)	84.0	90.7
1［2］	15 (12)	55.3 (90.0)	53.3	62.0
2	30	58.7 (70.3)	55.3	67.7
3	20	33.0 (50.0)	30.5	41.0
4	20	64.5 (52.5)	62.0	71.5

第1問の［1］と［2］は昨年度と出題分野が入れ替わっているので，昨年度分を今年度のものに合わせて変更した。

昨年度と比べ，第1問［1］（三角関数），第4問（ベクトル）の正答率は増加したが，他の問題の正答率は下がってしまった。また，どの大問も現役生と高卒生の得点率がかなり違うことも読み取れる。

③問題分析

次に，各問題についていくつかのコメントを述べておくことにする。なお，以下のコメント中の正答率は，前節で述べた「答案再現分析」をもとにしている。なお，偏差値帯 45.0～54.9 に属する受験生を「中位生」とし，それより上位の生徒を「上位生」，下位の生徒を「下位生」としている。

まず，『数ⅠA』について。

第1問［1］は「方程式と不等式」から無理数の計算，絶対値記号を含む不等式が出題された。**エオ**までは下位生でも 97% 以上の正答率があったが，

カキ 以降は（例年の第1問と比べて）計算量がやや多い。最後の不等式の解の正答率は 25% 程度であった（下位生は 5% 程度）。

第1問［2］は「集合と論理」からの出題で，2つの変数 a，b に関しての条件や命題を扱う問題であった。最初に反例を選ぶ設問が出題されている。(2) 以降は $a+b$，$a-2b$ のかたまりをそれぞれ別の文字で置き換えた方がやさしいだろう。正答率は順に 53%，81%，79%，58% であった。

第2問は「2次関数」からの出題であった。いくつかの条件から2種類の二次関数を決定する。**エオ** の下位生の正答率が 54% であり，ここでつまずくと最後まで響いてしまう。最大値や最小値の問題は放物線の軸に注目すればよいが，**ソタ** と **チツ** の正答率はそれぞれ 75%, 52% であった。

第3問は「図形と計量・平面図形」からの出題であった。4辺の長さが既知である円に内接する四角形の問題であり，**コサ** までは基本的といえるだろう。**コサ** の正答率は 88%（下位生 54%）であり，学習量によって差がついた問題である。**タ** は相似な三角形に注目して求めるとよいが，上位生でも正答率は 52% であった。後は，4点の共円条件および方べきの定理を用いる。図形の総合的な見方ができるかどうかを試す良問である。

第4問は「場合の数・確率」から反復試行の確率の問題が出題された。確率を p，q とおくことにより，計算がしやすく配慮されている。**キク** および **ケコ** の正答率はそれぞれ 85%, 86% である。書かれている通りに計算を進めれば，最後の期待値まで難なく解き進めることができるが，**チ 〜 ニ** の正答率は上位生でも 49% であった。

次に，『数ⅡB』について分析する。

第1問［1］は「三角関数」の問題である。θ の関数を，ある置き換えにより t の2次関数に変形し，その最小値を求める問題である。基本的な問題であり，直前に実施した弊塾のセンター試験プレテストでも同様の問題が出題されている。**コサ** と **シ** の正答率は 9割（上位生で 98%, 下位生 で 75%）ほどである。

第1問［2］は「指数関数・対数関数」からの出題である。二つの対数不等式の共通な整数解をすべて求める問題である。前半の不等式は標準であるが，**ネ** の正答率は上位生でも 34% であった。後半の不等式は，左辺が x に関して単調増加であることに注意して順に代入して調べることになる。**ノハ** の正答率は上位生でも 56% であった。

第2問は「微分法・積分法」からの出題である。放物線とその接線などによって囲まれた二つの部分の面積を求め，その和の最大・最小について考える。得点差がついたのは **コ 〜 セ** の設問である。上位生と下位生の正答率の差は 83ポイント以上あった。

第3問は「数列」からの出題である。問題文が長くて，細罫が多用されているほか，指数部分も選択肢から選ぶという方式である。さらに，テーマが内分点の座標に関する3項間漸化式を扱っており，解きにくいと感じた受験生が多いのではないか。**アイ** から正答率が 67%（下位生 33%）であった（誤答としては 3/4 が最も多かったようである）。**クケ**，**コサ** あたりは上位生でも正答率が5割強であった。

第4問は「ベクトル」からの出題である。ベクトル記号の下の文字（a，b）を選ぶというのは新傾向である。**シ** までは全体の正答率がほぼ8割を超えているが，交点の位置ベクトルを求める **スセ** の正答率は45% 程度であり，ここで差がついたようである。

④センター試験の学習対策

上記で見たように，問題によって難易度に差があるので苦手分野を作らないことが最大の対策である。特に，図形問題に苦手意識をもつ生徒が多いので，年間計画の中で少しずつ難しい問題にチャレンジさせていくとよいと思われる。

出題の内容としては，ここ数年来，二次試験などでよく扱われるテーマが出題されるようになってきている。余裕のある生徒には二次試験の対策問題集などにも取り組ませておきたいところである。

また，特に『数ⅡB』は時間が足りないという生徒が多く見られる。もちろん，多少の煩雑な計算ならばやってのけるだけの計算力は必要であるが，正しく速く効率的に数式を処理する力も身につけさせたい。

2．二次・私大入試の総括

本項では，今年度に実施された二次試験，私大入試の問題を分析した結果，学習指導要領改訂に関わるものに関し，目立った項目について所見を述べたい。

①行列・1次変換の出題

次期学習指導要領による入試では，「行列」が出題される可能性はなくなったが，昨年度からこの分野の出題はやや増加している。来年度以降もこの傾向は続くものと思われるので，注意が必要である。

まず，行列に関しては，$E+A+A^2+\cdots+A^n$ の形の式を計算する問題，対角化によって行列の n 乗を求める問題が目立ったほか，名古屋大（理系）では確率との融合問題が出題された。福井大（医学部）ではトレース，行列式に関する問題が出題されている。

次に，1次変換について見ていくことにする。

香川大（医）では 点列 $\{P_n\}$ を，$P_1(1,\ 0)$ から行列 $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ で次々と移すことで定め，これらの点がすべて一つの2次曲線上にあることを示す問題が出題されている。また，横浜市立大（医）や広島大（理系）ではアフィン変換が出題されている。

多くの大学では，「点の移動」という建前を崩さないように問題文に工夫がされているが，今年度は慶応大（理工）で曲線の一次変換による像を求める問題が出題されている。「図形の像」という考え方は是非扱っておきたいところである。

なお，1次変換による図形の像を求める際には，「もとの図形の方程式を媒介変数で表してその像を求め，媒介変数を消去する」という方法が多く採られているが，可能ならば，逆行列を用いて図形の像を求める方法を扱っておいた方がよいだろう。

最後に，次の京都府立医大の問題を挙げておく。

> 2次正方行列 A による1次変換 f と $\mathrm{P}(1,0)$ があり，$\mathrm{Q}=f(\mathrm{P})$，$\mathrm{R}=f(\mathrm{Q})$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$ である。
>
> (1) $f(\mathrm{R})=\mathrm{P}$ を示せ。
>
> (2) $A^2+A+E=O$ を示せ。
>
> (3) $\mathrm{PQ}=\sqrt{5}$，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{3}{2}$ のとき，A をすべて求めよ。

過去，「代数・幾何」の時代によく出題された問題である。是非扱っておきたい。

②整数問題

整数に関する出題も目立った。

次期の学習指導要領では，「整数の性質」という単元が数学Ａに新設された。数学Ａは平成11年公示の指導要領と同じく，分野を選択して学習することとなっている。「新指導要領において，たとえ出題範囲に数学Ａを含まなくても，この程度は出題するよ」という大学側からのメッセージと受け取っておきたいところである。

さて，整数問題で最も目立つのは，次の熊本大（教育・医）の問題のような，剰余系に関するものである。

> 2つの整数の平方の和で表される整数の集合を A とする。
>
> (1) A の要素 a^2+b^2（a，b は整数）が3の倍数のとき，a，b はともに3の倍数であることを示せ。
>
> (2) 整数 x に対し，$9x\in A$ ならば $x\in A$ であることを示せ。

次に，不定方程式の問題も多かった。次の一橋大の問題を一例として挙げておく。

> 次の条件を満たす正の整数の組（x，y）または（x，y，z）をそれぞれ求めよ。
>
> (1) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}\quad(1<x<y)$
>
> (2) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$
>
> $(1<x<y<z)$

静岡大（理）では以下の問題が出題された。

自然数 a_0，a_1 が与えられたとき，

- q_n は a_{n-1} を a_n で割った商
- $a_{n+1} = a_{n-1} - a_n q_n$

とする。ただし，$a_{N+1} = 0$ となる自然数 N が存在したら，$n > N$ に対して q_n および a_{n+1} は定義しない。次を示せ。

(1)　$a_{N+1} = 0$ となる自然数 N が存在する。

(2)　$a_N = aa_0 + ba_1$ となる整数 a，b が存在する。

(3)　a_N は a_0 と a_1 の最大公約数である。

ユークリッドの互除法に関する基本事項である。新課程で「整数の性質」を学習した場合は，この程度の内容は必ず学習することになると思われるが，その場合，これは「基本定理の証明」に位置づけられるだろう。

最後に，次の三重大（医）の問題を例示したい。

方程式 $x^2 + y^2 = z^2$　…①，$s^2 + t^2 = u^2 + 1$　…②

を考える。

(1)　実数 a，b に対し，$a^* = a + b$，
$b^* = 2a + b + 1$ で a^*，b^* を定める。
$(x,\ y,\ z) = (a,\ a+1,\ b)$ が ① の解ならば，$(s,\ t,\ u) = (a^*,\ a^*+1,\ b^*)$ は ② の解であることを示せ。
また，$(s,\ t,\ u) = (a,\ a+1,\ b)$ が ② の解ならば，$(x,\ y,\ z) = (a^*,\ a^*+1,\ b^*)$ は ① の解であることを示せ。

(2)　$y = x + 1$ を満たすピタゴラス数の組 (x, y, z) を 3 組求めよ。

ピタゴラス数を次々と作り出すアルゴリズムを与えており，興味深い。じっくり取り組ませたい問題である。

また，今年度は，小数部分に関する問題が，東京大，金沢大（理系），広島大と多かった。いずれにしても，新教育課程においては，教科書で整数分野を学習することができるようになり，この分野の知識を系統的に得ることができるようになる。教科書採択の際は，整数分野の記述にも注意したいところである。

③立体幾何に関する問題

新課程の数学Ａの「図形の性質」では立体図形も扱うことになっている。この分野の出題もいくつかあったので，一例を以下に挙げる。

- 正十二面体の頂点を結ぶ，あるベクトルの垂直を示す（福井大）
- 立方体の切り口に関する証明問題（京都府立医大）
- 正四面体の外接球の存在を示す（京都大）

このような問題は，ある程度道具が揃ってから，いろいろな方法で扱うことが望ましい。したがって，3年生の演習の時間などを使って取り組ませるとよいだろう。

④公式の証明問題

今年も基本公式等の証明問題が出題されている。一例を以下に挙げる。

- 相加・相乗平均の不等式（新潟大）
- $\displaystyle\int_\alpha^\beta (\beta - x)(x - \alpha)\,dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$（九州工業大）
- 原点のまわりの角 θ の回転を表す行列 $R(\theta)$ について，$\{R(\theta)\}^n = R(n\theta)$（九州工業大）
- 正弦定理（大分大）
- コーシー・シュワルツの不等式（大分大）
- $(x^2)' = 2x$ など（佐賀大）
- トレミーの定理（熊本大）

公式を使いこなす力だけでなく，公式を自分で証明したり，定義を正しく理解したりする能力が問われていると考えられる。

なお，基本公式ではないが，名古屋市立大（経済）では，いわゆる Schmidt の直交化が出題されている。

⑤その他の問題

平面図形に関し，名古屋市立大（医）では，座標を与えない軌跡の問題が出題されている。新課程の数学Ａの「図形の性質」で「軌跡」を扱うかどうかは現時点では明確ではないが，逆の論述も含めて一

度は扱っておきたい問題である。

> 点 O を中心とする半径 r の円の内部に点 A をとり，この円周上の点 P について，線分 AP の垂直二等分線と直線 OP の交点を Q とする。点 P がこの円周上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

また，九州工業大（情報工）では，以下の問題が出された。水量の問題は，他にも例えば福岡大などでも出題されている。演習で取り上げたい問題の一つである。

> $a>0$ と $f(x)=\left|x^2-a^2\right|\,(-2a \leqq x \leqq 2a)$ がある。$y=f(x)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に πa^2（cm³/ 秒）の割合で水を注ぐ。長さの単位は cm とし，注ぎ始めてから容器いっぱいになるまでの時間を T（秒）とする。
>
> (1) $y=f(x)$ のグラフをかけ。
>
> (2) 水面の高さが a^2 のときの水の体積 V を a で表せ。
>
> (3) T を a で表せ。
>
> (4) t 秒後の水面の高さ h を a と t で表せ。
>
> (5) t 秒後の水面の上昇速度 v（cm/ 秒）を a と t で表せ。ただし，$0<t<T$。

最後に，今年度の入試問題では，大阪大，京都大，防衛医大で対数の値を $0.301<\log_{10}2<0.302$ のように不等式で与える例があった。以前京都大ではこのような出題があったが，今年度，3大学でこのような出題がなされたことを特筆しておきたい。

⑥出題ミス

今年度も，いくつかの大学で出題ミスが発生した。

まず，信州大（工）では関数方程式が出題されたが，与えられた条件をすべて満たす関数 $f(x)$ が存在しないため，受験生全員に50点を与えるという措置がとられた。

また，明治大（情報コミュニケーション）では $\int_{-1}^{a} x^2\,dx=\int_{-1}^{b}|x|\,dx=\int_{-1}^{c} x\,dx=1$ を満たす a，b，c の大小を問う問題が出題されたが，条件不足のため，c が一通りに定まらない。この問題に関しては全員を正解とする措置がとられた。

さらに，九州歯科大のベクトルの問題では，与えられた条件を用いて計算を進めると $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-52$ となり，このようなベクトルが存在しないことがわかった。これについて大学がどのような措置をとったかは現在のところ不明である。

出題ミスが発覚した場合，多くの大学で「全員正解」の措置がとられる。しかし，計算が合わないことに焦った受験生が検算を繰り返して時間を浪費する可能性を考えると，果たしてこれが正しい措置であるかどうかは議論の必要があるだろう。

3．京都大の出題

平成19年度から昨年度まで，京都大では理系の問題を，受験する学部・学科により，甲（標準）または乙（やや難）の2セット出題していたが，今年度はすべての理系学部が同一内容の試験を行った。ただし，理系の問題はやややさしくなっており，医学部等では差がつきにくい出題となった可能性がある。来年度以降，どのような形になるかは予断を許さない。

また，京都大では，学習指導要領によらない独自の出題範囲（以下「固有分野」）を募集要項に示している。今年度の問題には，明確に固有分野の出題である，といえるものはなかった。理系の $\boxed{5}$ は「点と平面の距離の公式」を使うと解きやすくなるという程度であり，現行指導要領の範囲で解けなくはない。

今後の対策としては，文系の生徒に対しては体積，理系の生徒に対しては微分方程式，曲線の長さを中心として固有分野を一通り学習しておくのが望ましい。

ただ，京都大は，学習指導要領の範囲で十分に興味深い問題を出題できる大学であるから，新課程入試においては，このような「はみ出した」出題の是正を期待したいところである。

4．終わりに

数学・理科における新学習指導要領の施行はいよ

いよ来年度である。原稿執筆現在（4月初め），新課程入試に関しては，大学入試センターからの出題科目が発表されているのみであり，二次試験，私大入試に関して大学側からの情報はほとんどない。もちろん，これらの試験の予想・予測についても河合塾としては次々と発表しているところであるが，この段階でできることは新教育課程を十分に研究し，来年度入学する生徒を迎え入れる準備をすることである。

最近，イベント授業などの採点のため，生徒の答案を見る機会が多いが，かなり上位の生徒の答案であっても論理的な欠陥が見られる。また，抽象的思考を苦手とする生徒も多い。上位の生徒には，厳密であること・抽象的であることの面白さを学ばせたいものである。

筆者がこのレポートを担当して今回が7回目となった（1回目は現行課程入試予想）。ほぼ毎年書いていることであるが，生徒の計算力の低下が著しい。計算力がなければ大学入試に対応できない。入試問題を解く際，計算に詰まると解答の流れを理解しにくくなる。思考力を高めるためにも計算力は必須であり，どのレベルの生徒に対しても，できるだけ多くの演習の機会を与える必要があるだろう。そうした基礎力をつけるための工夫をすることが，新課程入試に問題なく対応するための現時点における最良の対策である。

■福眞剛司（ふくま・つよし）

河合塾にて高1～高3，大学受験科で標準レベルからトップレベルの授業を幅広く担当。教材では全国テキスト，マーク模試作成を担当。

著書：「マーク式基礎問題集13　数学Ⅰ・Ａ［1問1わざ］」（河合出版）〈共著〉