

ルーロの三角形

定幅図形の1つとしてルーロの三角形がある。ロータリーエンジンのローターがルーロの三角形の形状をしていることが知られている。ここで、正方形の中をルーロの三角形が内接しながら回転したとき、どのような軌跡を描くか、考えてみよう。

問題 正方形の中をルーロの三角形が内接しながら回転する。このときルーロの三角形の中心を G とするとき、点 G の描く軌跡について考えたい。図1～図4を見ながら各設問に答えよ。

(1) 点 G 軌跡はどのような図形であるか予想せよ。

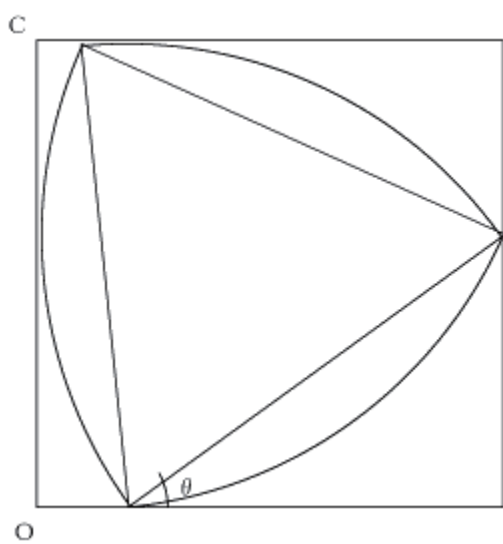


図1 ($30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$)

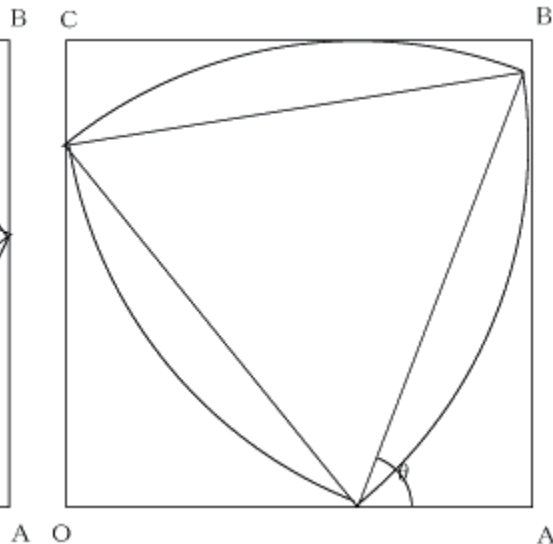


図2 ($60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)

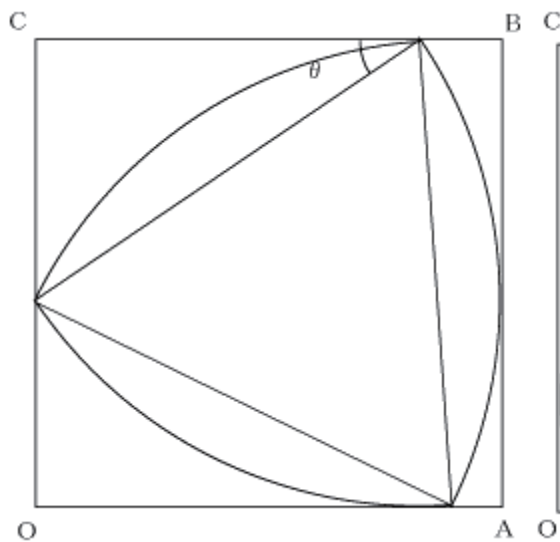


図3 ($30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$)

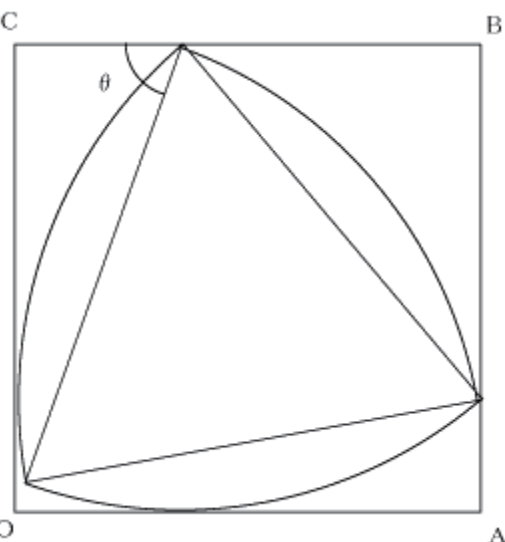


図4 ($60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)

上の図のように左下を原点として正方形の一辺の長さを a とすると、 $A(a,0), B(a,a), C(0,a)$ となる。実はすべての場合を知るには図1～図4のときを調べればよい。

(2) 図1 ($30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$) においては点 P_1, P_2 はそれぞれ OA 、 AB に接している。このとき点Gの座標を媒介変数表示せよ。

まず点 P_1, P_2, P_3 の座標を媒介変数表示する。

P_1 は OA に接しているのので y 座標は_____、

x 座標は $OP_1 = OA - P_1A$ より $x =$

よって点 $P_1(x, y) = ($ _____、 _____)

次に P_2 は AB に接しているのので x 座標は_____

P_2 の y 座標は AP_2 より _____ y 座標は_____

よって $P_2(x, y) = ($ _____、 _____)

また P_3 の x 座標は $OA - AP_1 + P_1P_3 \cos \angle P_3P_1A$ より

ここで $P_1P_3 \cos \angle P_3P_1A$ を a 、 θ を用いて表すと=_____

よって P_3 の x 座標は_____

P_3 の y 座標は_____ = _____

よって $P_3(x, y) = ($ _____、 _____)

中心Gの座標は $G(x, y) =$

$G(x, y) =$ _____①

(3) 図2 ($60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) になると P_1, P_3 がそれぞれ OA, OC に内接する。このとき点Gの座標を媒介変数表示せよ。

点 P_1 の x 座標は $P_1P_3 \cos \angle P_3P_1O = P_1P_3 \cos(180^\circ - \angle P_3P_1A) =$

よって $P_1(x, y) = ($ _____、 _____)

点 P_2 の x 座標は点 $OP_1 + P_1P_2 \cos \theta =$

点 P_2 の y 座標は _____ より

よって点 $P_2(x, y) = ($ _____、 _____)

点 P_3 の x 座標は

よって点 $P_3(x, y) = (\qquad \qquad \qquad , \qquad \qquad \qquad)$

以上より点 G の座標は
 $G(x, y) =$

$G(x, y) =$

$\dots\dots\dots$ $\textcircled{2}$

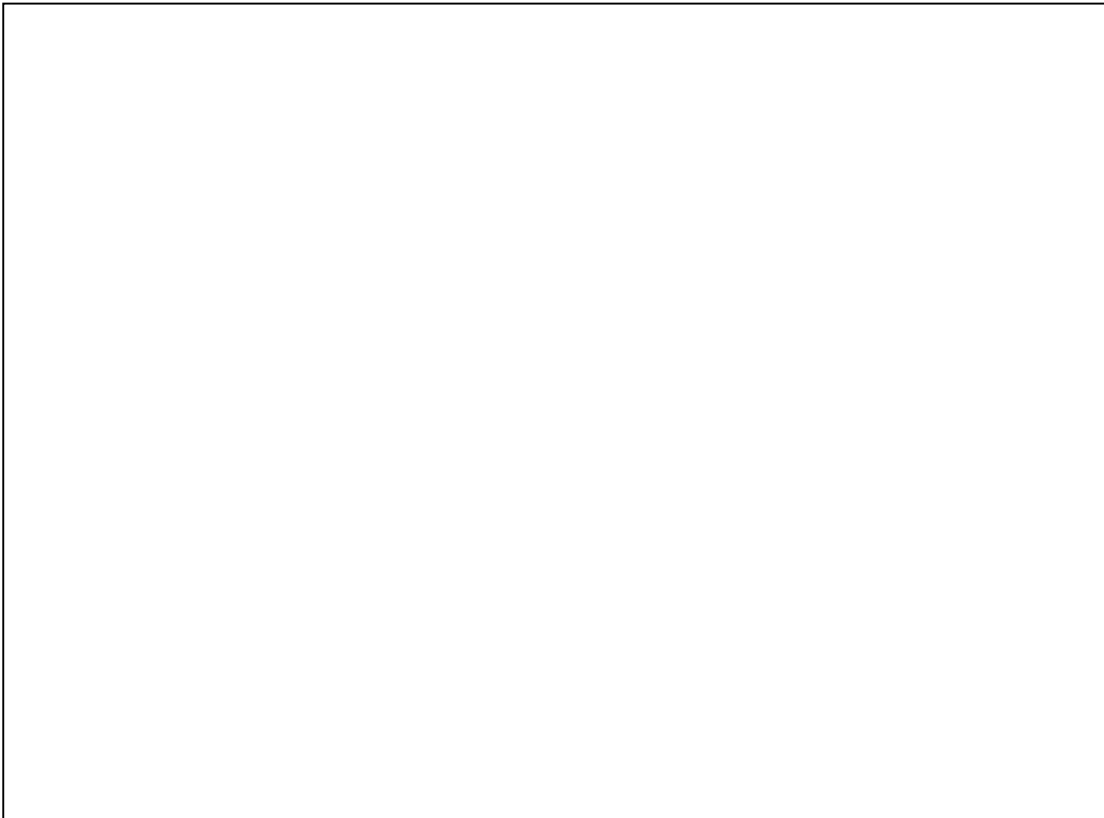
(4) 図3のとき (2)、(3) を参考にして $30^{\circ} \leq \theta \leq 60^{\circ}$ のときの点 G の座標を媒介変数表示せよ。

(5) 図4のときの中心は同様に計算をすると

$$G(x, y) = \left\{ a - \frac{2}{3}a \cos(120^\circ - \theta) - \frac{1}{3}a \cos \theta, -\frac{1}{3}a \sin \theta - \frac{1}{3}a \sin(120^\circ - \theta) \right\} \quad \text{である。}$$

Grapesに入力して点 G の軌跡を観察せよ。但し入力するとき、基本図形を用い、関数を入力するときオプションをクリックし、弧度法から度数法にかえるとよい。(今は 30° というように θ の範囲が度数法で考えているから)

(2) ~ (4) より点 G の媒介変数表示は



すると点 G の軌跡の形状は



となる。

まとめ

正方形にルーロの三角形が内接して回転するとき、その中心の軌跡は



である。