

先生方のための徹底入試対策講座

第38回 数学的帰納法は成り立たない？

数学的帰納法は公理に基づくようなものですから、単に形の追求だけではなく、その証明の仕組みにつねに注目しておかなければなりません。入試問題には数学的帰納法に関してはやさしい問題か、難しい問題か、出題されている問題によるギャップがあります。



証明の仕組みに注目した、次のような良問があります。

碁石には白と黒の2種類の石がある。ところが、A君は『任意の碁石の集合は1種類の石しか含まない』ことを以下のように証明しようとした。A君の数学的帰納法の運用方法が誤っている理由を説明せよ。

[A君の証明]

どの碁石の集合 S も1種類の石しか含まないことを証明したい。そこで、集合 S に含まれる碁石の数 n に関する数学的帰納法によって、このことを証明する。

[I] $n=1$ の場合を考える。1個の碁石からなるどの碁石の集合 S についても、 S に含まれる碁石は明らかに1種類である。

[II] $n=k$ の場合に成立することを仮定する。すなわち、 k 個の碁石を含むどの碁石の集合 S についても、 S に含まれる碁石は1種類であることを仮定する。そして、 $n=k+1$ の場合に成立することを示す。すなわち、 $k+1$ 個の碁石を含む碁石の集合 T を任意に選んだとき、 T に含まれる碁石は1種類であることを証明する。

T から勝手に2つの碁石 a と b を取る。残りの集合を T' とする。 T' に a を加えた集合は k 個の碁石を含むので、帰納法の仮定から、この集合に含まれる碁石は1種類である。したがって、 T' に含まれる碁石と a は同じ種類である。一方、 T' に b を加えた集合も k 個の碁石を含むことから、同様にして、 T' に含まれる碁石と b は同じ種類である。ゆえに a と b は同じ種類である。すなわち、 T は1種類の碁石からなる。

[証明終了]

(2000 九州大学/後期)

碁石は1種類しかない?!?!?!?

これでは対局においてどちら側の石がどちら側の石を囲んでいるか、区別がつかいません。囲碁はできないということが証明されました!?!?!?



初め一読して、なるほど、基石は1種類か... ン?というような状態です。難しいですね。すごくもっともらしいので...

.....

どう考えればいいのでしょうか。[A君の証明]の[II]において
「 T' に含まれる基石と a は同じ種類」かつ「 T' に含まれる基石と b は同じ種類」
から、

「 a と b は同じ種類」

を示していますが、ここでは、基石の集合 T' と基石 a と基石 b が登場します。もし集合 T' が空集合なら、 T' に含まれる基石の種類は定まらないので、 T' は1個以上の基石を含むということになります。少なくとも3個の基石があるわけです。したがって、[II]の議論は、 $k+1 \geq 3$ 、すなわち、 $k \geq 2$ のときにしか成り立たないことになります。 $k=1$ では成り立たないのです。

[I]では $n=1$ の場合を示していますが、[II]を用いても、 $n=1$ の場合と $n=2$ のケースはつながりませんね。

.....

数学的帰納法を、いくつかのパターンに分けてそれに当てはめるといって、数学から最も遠い方法では、到底、歯が立ちませんね。

学校法人河合塾 開発研究職 数学科講師 大竹真一