

先生方のための徹底入試対策講座

第2回 定理・公式の証明(1)

～ロピタルの定理を使ってもいいですか?～

受験生から、数学の定理や公式について入試に使っていいのかわからないのか聞かれることがあります。この質問の中にも、その生徒の数学に対する姿勢を垣間見ることができます。

1 「ロピタルの定理を使ってもいいですか?」

「教科書にはないんですけど、ロピタルの定理を使ってもいいですか?」
と先日もこのような質問を受けました。私は予備校の講義でロピタルの定理を使わないからです。先生方はよくご存知だとは思いますが、簡単に書くと

(ロピタルの定理)

関数 $f(x)$, $g(x)$ が $x=a$ の近くで ($x=a$ は除いてもよい) 微分可能であり $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=0$

(あるいは $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=\infty$) とする. $g'(x) \neq 0$ であって $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ が存在するなら

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

である. ただし, L は実数または $\pm\infty$ である.

というものです. もちろん, 正しいものを正しく使うのであれば問題はありません. そこで, このようなとき, まず, その生徒に質問することにしています.

.....

「その定理はどんな定理?」

「先生は知らないんですか? 極限を求められないときに分母と分子を微分してもいいんです.」(不審そうな表情)

「ふーん, よくわからないから, きちんと書いてくれるかな. ついでにその証明も.」(と言って紙と筆記具を渡す)

「……………」(無言で固まっている)

「では, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2}$ の値を求めるとどうなるかな?」

「ロピタルの定理を使って $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{2}$

となります.」(もちろん, 誤答!!! 正しくは $+\infty$ に発散する.)

「どうやら君は, ロピタルの定理を使ってはいけないようだね.」

2 答えを出すことが目標ではない.

この定理が高校の範囲かどうかというようなことが問題なのではありません. 大切なのは次の2点です.

(1) 自分で証明できないような定理や公式は使ってはならない.

数学は明らかに正しいと思われるものから始めて論理を道具に考えを進めていくものと思うからです. 自分が納得できないようなものを使うのは, 言語道断, その姿勢がよくない. もちろん納得というのはあくまで高校レベルの厳密さです. ときには, 教科書の自然対数の底 e の存在のように「知られている」で納得しなければなりません. これも含めてです.

(2) 数学は答えが出たらいいというものではない. 問題を解くとは, その過程が自分も納得でき, 他者をも説得できることである.

その共通言語として論理があります.

このロピタルの定理の質問をした生徒は, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2}$ の値の求め方がわからなくて, ロピタルの定理を使おうと思ったそうです. そんなこと思うより, 基本的な学力を養うことが先ですよ. ロピタルの定理を使わないと解けない入試問題はないのですから.

学校法人 河合塾 数学科専任講師 大竹真一

次回は, 「第3回 定理・公式の証明(2) ～東大に出た基本公式の証明～」を予定しています.